Technique

Exercice 1 - ●○○○

Dans chaque cas, l'application f donnée est-elle une application linéaire sur E ?

1. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x + y$
2. $E = \mathbb{R}^2, \quad f : (x, y) \longmapsto (x^2, x + y)$
3. $E = \mathbb{R}[x], \quad f : P \longmapsto f(P)$, où $f(P) : x \longmapsto P(x+1) - P'(x)$
4. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ x - y \\ x + y + z \end{pmatrix}$
5. $E = \mathbb{R}[x], \quad f : P \longmapsto f(P)$, où $f(P) : x \longmapsto P(0) + P'(x)$
6. $E = \mathbb{R}^3, \quad f : (x, y, z) \longmapsto (z, y, x + 1)$

Exercice 2 - ●○○○

Dans chaque cas, montrer que f est une application linéaire (expliciter les espaces vectoriels de départ et d'arrivée), donner sa matrice canoniquement associée puis déterminer une base de son noyau et de son image, et préciser également si elle est injective/surjective/bijective.

1. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix}$
4. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ y - 3z \\ 2z \end{pmatrix}$
5. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x - y + z$
6. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + z \\ y - z \end{pmatrix}$
7. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2z \\ 2x + y + z \\ 2y - z \end{pmatrix}$
8. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y + z \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$
9. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$
10. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 3y + 2z + 2t \\ 3x + 4y + z + 6t \\ 2x + y - z + 4t \\ x - 2y - 3z + 2t \end{pmatrix}$

Entraînement

Exercice 3 - ●○○○

Soient $E = \mathbb{R}_2[x]$ et f l'application qui à $P \in E$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(P)(x) = P(x) - xP'(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E, puis donner sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 - ●○○○

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ f(M) = AMA$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(I_2)$ et $f(A)$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
5. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ f(M) = M\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
6. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 - ●○○○

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6 – ●●○○

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f, canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. Montrer que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, puis déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
4. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \notin \ker(f)$, $\vec{v} \in \ker(f)$ et $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}\big(f(\vec{u})\big)$.
5. Montrer que la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On notera également $f^2 = f \circ f$.

Exercice 7 – ●○○○

Démontrer que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice 8 – ●●○○ – Projecteurs

On suppose que $f^2 = f$. Démontrer que, pour tout $y \in E$: $y \in \mathrm{Im}(f) \iff f(y) = y$.

Exercice 9 – ●●●○ – Endomorphisme nilpotent

On suppose que E est de dimension finie égale à n et qu'il existe $k \in [\![2; +\infty[\![$ tel que : $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\big)$ soit libre.
2. En déduire que $k \leqslant n$.

Exercice 10 – ●●●○ – Un peu théorique...

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Concours

Exercice 11 – ●●○○ – Ecricome 2003 E

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer les réels λ de sorte que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ne soit pas bijectif.
2. Justifier que l'on peut choisir une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur dont la première composante est égale à 1. On notera e_1 ce vecteur.
3. Justifier que l'on peut choisir une base de $\ker(f - 2\mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur dont la seconde composante est égale à 1. On notera e_2 ce vecteur.
4. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ de sorte que $f(e_3) = e_2 + 2e_3$.
5. Démontrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; puis donner la matrice de f dans cette base, notée T.
6. Exprimer A en fonction de T, P, P^{-1}, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3).
   - 6.a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n.
   - 6.b. En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
7. Soit $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.
   - 7.a. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - 7.b. Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :
   $$M \in \mathcal{C}_A \iff TM' = M'T$$
   - 7.c. Montrer ensuite que M' vérifie $TM' = M'T$ si, et seulement si, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   - 7.d. En déduire que M appartient à $\mathcal{C}_A$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que : $M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

7.e. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}_A$, puis préciser sa dimension.

Exercice 12 - ●●○○ - EDHEC 2017 E

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e_0(t) = 1\ ;\ e_1(t) = t\ ;\ e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1. 1.a. Montrer que φ est linéaire.
   1.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   1.c. Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. 2.a. Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2).
   2.b. Justifier que φ est un automorphisme de E.
   2.c. Déterminer les réels λ de sorte que $\varphi - \lambda\mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.
   2.d. Donner le rang de $\varphi - \mathrm{id}$. En déduire la dimension de $\ker(\varphi - \mathrm{id})$.
3. 3.a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$.
   3.b. En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
   3.c. Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 13 - ●●○○ - EDHEC 2020 E

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M)$ définie par :

$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2. 2.a. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   2.b. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   3.a. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   3.b. Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. 4.a. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   4.b. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.
   4.c. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.

Exercice 14 - ●●●○ - HEC 2013 E

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.
On définit l'application f sur E qui à toute fonction polynomiale $P \in E$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = -3xP(x) + x^2P'(x)$$

1. 1.a. Montrer que f est une application linéaire.
   1.b. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   Expliciter, pour tout réel x, $f(P)(x)$ et en déduire que f est un endomorphisme de E.
   1.c. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.
   1.d. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.
   1.e. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
   Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

2.a. Calculer $g \circ (\mathrm{id}_E - u)$. Qu'en déduire sur g ?

2.b. Soit $P \in E$ tel que $P \notin \ker(u^3)$. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

2.c. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$.

Pour aller plus loin...

Exercice 15 - ●●●○ - Rang et composition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n ainsi que f, g, h trois endomorphismes de E.
L'objectif de l'exercice est d'établir les trois résultats suivants :

- $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\big)$.
- Si h est bijectif, alors $\mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(f)$.
- Si g est bijectif, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

1. Démontrer le premier résultat.
2. 2.a. Montrer que si h est bijective, alors $\mathrm{Im}(f \circ h) = \mathrm{Im}(f)$.

   2.b. En déduire le second résultat recherché.
3. 3.a. Considérons l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)}$: restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.
   Autrement dit :
   $$g_{|\mathrm{Im}(f)} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & G \\ \vec{u} & \longmapsto & g(\vec{u}) \end{array} \right.$$
   Montrer que $g_{|\mathrm{Im}(f)}$ est injective.

   3.b. En déduire le troisième résultat recherché.

Exercice 16 - ●●●● - Rang de la transposée

Soient $n, p \in [\![2; +\infty[\![$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'objectif de l'exercice est d'établir : $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

1. **Résultat préliminaire.**
   Établir :
   $$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big({}^tYY = 0 \iff Y = 0_{n,1}\big)$$
2. *Supposons dans cette question que $n = p$.*

   2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer : $AX = 0_{n,1} \iff {}^tAAX = 0_{n,1}$.

   2.b. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$ et que $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A{}^tA)$.

   2.c. Conclure que $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$. *Indication : on pourra utiliser le premier résultat de l'exercice précédent.*
3. Montrer que le résultat est encore vrai dans le cas où $n \neq p$.