



6

ANALYSE COMPARAISON DE FONCTIONS

INTRODUCTION...

La notion de limite (historiquement introduite par l'étude des suites et des séries) a nécessité un travail conséquent et a suscité d'importants débats au sein de la communauté mathématique... On pouvait déjà voir, autour du III^{ème} siècle avant Jésus-Christ : *"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées."*

Nous sommes au XVIII^{ème} siècle quand D'Alembert, Leibniz et Euler tentent une définition formelle de la notion de limite. Le calcul différentiel a déjà débuté, en lien avec l'astronomie et la mécanique, et les termes "infinitement petit", "infinitement grand", "infinitésimal" sont souvent utilisés de façon intuitive (via une approche visuelle ou géométrique) mais peu rigoureuse.

Le développement de l'analyse entraîne une volonté de rigueur mathématique sans précédent. Les récents travaux sur la géométrie prouvent qu'il n'est pas possible de construire les mathématiques sur une approche géométrique et intuitive. Par la suite, Cauchy donnera, au début du XIX^{ème} siècle, une définition plutôt satisfaisante de la limite ; mais la difficulté est ailleurs à cette époque : la définition même de l'ensemble des réels est imprécise et ne permet pas une définition parfaitement rigoureuse et unanime de limite. Quelques décennies plus tard, après le travail de Bernhard Bolzano (1781-1848, tchèque) resté dans l'ombre, les travaux de Karl Weierstrass (1815-1889, allemand) mettent le point final à la construction de $\mathbb{R}$ et fournissent ainsi une définition rigoureuse de continuité d'une fonction et de la limite, à l'aide des fameux epsilon (cette définition est sensiblement celle utilisée actuellement).

Définition de limite par Cauchy : *"Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres."*

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une fonction ?
2. Définition quantifiée de fonction possédant une limite finie en $+\infty$.
3. Définition quantifiée de fonction dont la limite est ℓ en un réel a .
4. Définition quantifiée de fonction f tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
5. Définition quantifiée de fonction dont la limite est $+\infty$ en un réel a .
6. La fonction f est dérivable en un réel a lorsque :
7. Définition de suite négligeable devant une autre.
8. Définition de suites équivalentes.

- D1** Soit $a \in \mathbb{R}$. Un **voisinage (fermé) de a** est un segment contenant a non réduit à $\{a\}$.
- D2** Un **voisinage (fermé) de $+\infty$** (resp. $-\infty$) est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A]$, $A \in \mathbb{R}$.

I NÉGLIGEABILITÉ DE FONCTIONS

DÉFINITION 2

NÉGLIGEABILITÉ DE FONCTIONS

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

On dit que **la fonction f est négligeable devant la fonction g en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notation

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Pour info...

De façon générale, f est négligeable devant g en a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction ε tels que :

- ✓ $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$,
- ✓ $\forall x \in V_a, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

NOTATIONS

DE LANDAU

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

- N1** On note $\underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g en a .
- N2** Par abus, on écrira $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ au lieu de $f \in \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$.
On lira " $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque x tend vers a ".

Remarque

Dans l'écriture " $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ ", le x est muet.

EXEMPLES 1

- E1** $x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^3)$ et $x^3 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$
- E2** $\frac{1}{\sqrt{x}} = \underset{x \rightarrow 0}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$:
Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ si, et seulement si, en a , f tend moins vite vers $+\infty$ que g .
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$:
Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ si, et seulement si, en a , f tend plus vite vers 0 que g .
- $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(1)$ si, et seulement si, f tend vers 0 en a .

En gros...

"Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

PROPRIÉTÉS 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

- P1** $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \end{array} \right\} \implies \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ (linéarité)
- P2** $\left. \begin{array}{l} f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \\ g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x)) \end{array} \right\} \implies f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(h(x))$ (transitivité)
- P3** $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \implies f(x)h(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)h(x))$
- P4** $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_1(x)) \\ f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_2(x)) \end{array} \right\} \implies f_1(x)f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g_1(x)g_2(x))$
- P5** $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x)) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(\lambda g(x))$
- P6** Si f ne s'annule pas au voisinage de a : $f = \underset{x \rightarrow a}{o}(g) \implies \frac{1}{g} = \underset{x \rightarrow a}{o}\left(\frac{1}{f}\right)$

* DÉMONSTRATION : On adapte celles du chapitre 1...

EXEMPLES 2

E1 On a : $x^2 = o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$, $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$ et $1 = o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$. D'où : $x^2 + 2x + 1 = o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$.

E2 $x^4 + x^2 + 2x + 1 + o_{x \rightarrow +\infty}(x^3) = x^4 + o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$.

En effet, puisque $x^2 + 2x + 1$ est négligeable devant x^3 en $+\infty$, l'expression $x^4 + x^2 + 2x + 1 + o_{x \rightarrow +\infty}(x^3)$ est en fait égale à x^4 + la somme de deux quantités négligeables devant x^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x)^a = o_{x \rightarrow +\infty}(x^b)$$

$$\forall b, c \in \mathbb{R}^{+*}, x^b = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{cx})$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x)^a \ll_{x \rightarrow +\infty} x^b \ll_{x \rightarrow +\infty} e^{cx}$$

Ainsi que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, (a < b \implies x^b = o_{x \rightarrow 0}(x^a))$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x)^a = o_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}\left(\frac{1}{x^b}\right)$$

E4 Par croissances comparées $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\sqrt{x})$, donc : $\frac{\ln(x)}{x} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

E5 Par croissances comparées $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\sqrt{x})$ et $e^{-x} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc : $\ln(x)e^{-x} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Parfois, on écrira $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(h(x))$ qui se lit " $f(x)$ égale $g(x)$ + un petit o de $h(x)$ ". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une fonction φ , négligeable devant h en a , telle que : $\forall x \in [...]$, $f(x) = g(x) + \varphi(x)$.

Vocabulaire

Le symbole " $\ll$ " se lisant alors "est négligeable devant".

II ÉQUIVALENCE DE FONCTIONS

DÉFINITION 3

ÉQUIVALENCE DE FONCTIONS

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

On dit que **la fonction f est équivalente à la fonction g en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Dans ce cas, on écrira : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Pour info...

De façon générale, f est équivalente à g en a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction h tels que :

- ✓ $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$,
- ✓ $\forall x \in V_a, f(x) = g(x)h(x)$.

EXEMPLES 3

E1 $x^2 + 2x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ et $x^2 + 2x + 1 \sim_{x \rightarrow 0} 1$

E2 par croissances comparées $x = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$, donc $e^x + x \sim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

E3 $\ln(x+1) \sim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$

E4 ~~$e^{x+1} \sim_{x \rightarrow +\infty} e^x$~~

★ Classique ! ★

À savoir démontrer.

À retenir...

Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne compose pas les équivalents !

Trouver une fonction g équivalente à f en a c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f au voisinage de a . Le but étant de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que celle de f ...

PROPRIÉTÉS 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

P1 $f(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$ (réflexivité)

P2 $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \iff g(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$ (symétrie)

Important !

On peut donc dire " f et g sont équivalentes".

$$\boxed{\text{P3}} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \end{array} \right\} \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \quad (\text{transitivité})$$

$$\boxed{\text{P4}} \quad \forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

$$\boxed{\text{P5}} \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \implies f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell \right)$$

$$\boxed{\text{P6}} \quad \left. \begin{array}{l} f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x) \end{array} \right\} \implies f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)g_2(x) \quad (\text{compatibilité avec le produit})$$

$$\text{En particulier : } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda g(x).$$

$$\boxed{\text{P7}} \quad \left. \begin{array}{l} f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x) \end{array} \right\} \implies \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \quad (\text{compatibilité avec le quotient})$$

$$\boxed{\text{P8}} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ f \text{ et } g \text{ sont strictement positives au} \\ \text{voisinage de } a \end{array} \right\} \implies \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^\alpha \quad (\text{compatibilité avec la puissance})$$

$$\boxed{\text{P9}} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \implies |f(x)| \underset{x \rightarrow a}{\sim} |g(x)| \quad (\text{compatibilité avec la valeur absolue})$$

$$\boxed{\text{P10}} \quad \text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x), \text{ alors il existe un voisinage de } a \text{ tel que } f(x) \text{ et } g(x) \text{ ont même signe sur ce voisinage.}$$

$$\boxed{\text{P11}} \quad \text{Trois choses parfois utiles :}$$

$$\boxed{\text{P12.a}} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x)) \end{array} \right\} \implies f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$$

$$\boxed{\text{P12.b}} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ f_1(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \end{array} \right\} \implies f(x) + f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$$

$$\boxed{\text{P12.c}} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x)) \iff f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(f(x))$$

Remarque

En particulier :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \implies \frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$$

★ DÉMONSTRATION : On adapte celles du chapitre 2...

★

Trois choses importantes sur les équivalents :

1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence (autre que la valeur absolue et une puissance) !
3. Si un jour on arrive à écrire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

Pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$ n'est pas permise !

THÉORÈME 1

ÉQUIVALENTS USUELS

$$\boxed{\text{T1}} \quad \text{Soient } n \in \mathbb{N}^*, a_0, a_1, \dots, a_n \text{ des réels et } b_0, b_1, \dots, b_n \text{ des réels tels que } b_0 < b_1 < \dots < b_n.$$

- Si $a_n \neq 0$, alors $a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_nx^{b_n}$.
- Si $a_0 \neq 0$, alors $a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_0x^{b_0}$.

$$\boxed{\text{T2}} \quad \text{Soit } a \in \mathbb{R}.$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array} \right\} \implies f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

$$\boxed{\text{T3}} \quad \text{On en déduit :}$$

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1 ; \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x ; \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

$$\boxed{\text{T4}} \quad \text{Soit } a \in \mathbb{R}. \text{ Si}$$

- ✓ h ne s'annule pas au voisinage de a (h peut s'annuler en a),
- ✓ $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$;

alors :

$$\ln(1+h(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) ; \quad e^{h(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad (1+h(x))^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha h(x)$$

Autrement dit :

- Une somme de puissances de x est équivalente, en $+\infty$, à son terme non nul de plus grand exposant.
Cas particulier : une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.
- Une somme de puissances de x est équivalente, en 0, à son terme non nul de plus grand exposant.
Cas particulier : une expression polynomiale est équivalente en 0 à son terme non nul de plus bas degré.

Cas particulier

$$\text{Si } \alpha = \frac{1}{2} : \quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$$

★ DÉMONSTRATION :

T1. On adapte celle du chapitre 1.

T2. Supposons que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Puisque f est dérivable en a , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Ainsi, puisque $f'(a) \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)$$

D'où :

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

T3. Découlent immédiatement de T2 en prenant "les bonnes fonctions"...

T4. Immédiat, en revenant à la définition de fonctions équivalentes avec les limites et en utilisant T3.

Remarque

Sans supposer que $f'(a) \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o_{x \rightarrow a}(1)$$

Et donc :

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}((x - a))$$

D'où :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}((x - a))$$

Ceci est le développement limité de f à l'ordre 1.

★