Exercices du chapitre 6
Tout sur les intégrales

Technique

Exercice 1 - ●●○
Étudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, déterminer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}dx$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx$
15. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$
16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}dx$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$
19. $\displaystyle\int_0^{1} x^k\ln(x)dx$, pour $k \in \mathbb{N}$

Exercice 2 - ●●○
Étudier la nature de chaque intégrale ci-dessous.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t+1}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+\sqrt{t}}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\ln(t)}dt$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^4}\right)dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}$

Entraînement

Exercice 3 - ●●○ - Une intégrale classique
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}dx$.

Exercice 4 - ●●○ - Fonction définie par une intégrale
On considère la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}dt$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
6. Justifier que g admet une limite en $+\infty$.
7. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice 5 - ●●○ - Fonction définie par une intégrale
On définit la fonction f sur $[0;1]$ par : $f(0)=0$, $f(1)=\ln(2)$ et pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0;1]$.
2. 2.a. Soit $x \in]0;1[$. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

   2.b. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$: $x^2\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$.

2.c. En déduire que f est continue sur $[0;1]$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$ puis déterminer ses variations.

Exercice 6 – ●●○ - Fonction Gamma

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Pour $x \in \mathscr{D}$, on pose alors $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

2. Soit $x \in \mathscr{D}$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

Concours

Exercice 7 – ●●○ - EDHEC 2004 E

Le but de l'exercice est de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. 3.a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$.
   3.c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. 4.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   4.c. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

5. 5.a. Justifier, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   5.b. Montrer : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.
   5.c. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Exercice 8 – ●●○ - EDHEC 2003 E

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. 1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   1.b. En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
3. 3.a. Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$.
   3.b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.
   3.c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.