Les Chartreux

6

Suites

Généralités & suites usuelles

Introduction...

Difficile d'être précis sur l'origine des suites en mathématiques, qui sont très utilisées en arithmétique et en analyse. En revanche, Leonardo Da Pisa ($\simeq 1180 - 1250$, italien, plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci) avait déjà introduit, en 1202, la célèbre suite qui porte son nom via le problème suivant : "*Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.*".
En notant (F_n) le nombre de couples de lapins en début du $n^{\text{ème}}$ mois, on obtient :

- $F_1 = 1$ (initialement, 1 couple de jeunes lapins)
- $F_2 = 1$ (le couple n'a pas encore procréé, ils ne peuvent que dans le second mois après leur naissance)
- $F_3 = 2$ (le couple initial, plus le nouveau couple engendré en un mois)
- $F_4 = 3$ (seul le couple initial a engendré un couple supplémentaire, l'autre étant trop jeune)
- $F_4 = 5$ (les 3 couples du mois précédents + un couple par couple capable de procréer : il y en a 2, le couple initial, et celui né il y a 2 mois)
- $F_5 = 8$...

On obtient ainsi la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sans oublier les conditions initiales $F_1 = F_2 = 1$. Un des objectifs de ce chapitre est de déterminer une expression explicite de F_n en fonction de n.
Pour finir, quelques mots sur Fibonacci... Il est un des rares mathématiciens de son époque et son travail a porté à la fois sur la géométrie et sur la résolution des équations du premier et second degré, mais aussi sur le calcul de racine carrée et cubique. Son influence a également été importante dans l'introduction des chiffres arabes en Occident.

Pour bien démarrer...

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n^2 + 3^{2n}$, que vaut $f(n+1)$?
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2(n+1)^2 + 3^{2(n+1)} \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) + 3^{2n+2} \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 3^2 \times 3^{2n} \end{aligned}$$

✘ Attention !
On remplace n par $(n+1)$!

2. Rappeler les règles de calculs sur les puissances.
   Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n, m \in \mathbb{N}$:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{nm}$$

   et si $b \neq 0$:

$$\frac{1}{b^m} = \left(\frac{1}{b}\right)^m = b^{-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

3. Factoriser l'expression $x^{n+1} - x^n$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= x^n \times x - x^n \\ &= x^n(x-1) \end{aligned}$$

I Suites numériques : premières définitions

Définitions 1 — **Suite**

D1 Une **suite numérique** u est une fonction :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

On notera u ou (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

D2 u_n est appelé **terme de rang n** (ou terme d'indice n).

D3 Le premier terme de la suite (souvent u_0 ou u_1) est appelé **terme initial**.

Vocabulaire
Donner le **terme général** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est donner l'expression explicite de u_n en fonction de n.

✓ Rigueur !
u_n désigne un terme de la suite, donc un nombre... Alors que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite** ; comme pour les fonctions : f est une fonction, alors que $f(x)$ est un nombre !

Dans tout ce chapitre, nous ferons comme si toutes les suites étaient définies sur $\mathbb{N}$ tout entier. En pratique, ça ne sera pas toujours le cas. Les énoncés du cours contenant un "pour tout $n \in \mathbb{N}$" seront alors à modifier.

Au fil de l'année, nous allons étudier différentes suites, qui pourront être définies ainsi :

- **explicitement :** on donne u_n en fonction de n (c'est à dire par la donnée du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ;
- **par une relation de récurrence :** un ou plusieurs premiers termes puis une expression d'un terme en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents ;
- **implicitement** ;
- on peut aussi définir plusieurs **suites imbriquées**.

Exemples 1

E1 **Suites définies par leur terme général :**

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n + \dfrac{1}{3}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \dfrac{1}{n} + 2^n$
- $\forall n \geqslant 2, \quad w_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$

E2 **Suites définies par une relation de récurrence :**

- $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{array} \right.$

☞ Pour info...
La suite (F_n) définie par : $\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 1 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{array} \right.$ est la suite de Fibonacci.

E3 **Suites définies implicitement :**
On peut démontrer (grâce au théorème de bijection) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\mathrm{e}^{-nx} - x = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, on note α_n cette unique solution. On définit ainsi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on peut d'ailleurs dire que $\alpha_0 = 1$.

E4 **Suites imbriquées :**
On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

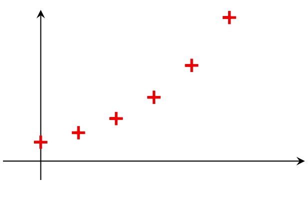
$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{2} \qquad ; \qquad v_{n+1} = -u_n + v_n$$

Comme pour les fonctions, il est naturel de définir de nouvelles suites par opérations (quand cela a du sens, et avec $\lambda \in \mathbb{R}$) :

$$(\lambda u_n) \;\; ; \;\; (u_n + v_n) \;\; ; \;\; (u_n v_n) \;\; ; \;\; \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$$

II Représentation graphique d'une suite

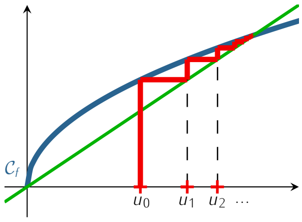
Deux cas :



1. **Représentation point par point :** la représentation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ dans un repère du plan.
Cela revient à représenter une suite comme une fonction... On peut faire cela pour toutes les suites, à condition de calculer un certain nombre de termes.
2. **Pour les suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1 :** il existe une représentation graphique qui permet aussi de déterminer graphiquement les valeurs des termes de la suite...

♣ **Méthode 1** ♣ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$", où f est une fonction connue :

- Tracer la droite d'équation $y = x$ (**première bissectrice**) ainsi que la courbe de la fonction f.
- Placer la valeur de u_0 sur l'axe des abscisses.
- Obtenir u_1 en remarquant que $u_1 = f(u_0)$; c'est à dire que u_1 est l'image de u_0 par f.
- *Reporter* sur l'axe des abscisses la valeur de u_1 en utilisant la première bissectrice.
- Réitérer jusqu'à en avoir marre...



III Variations des suites

Définitions 2 — **Suite croissante / décroissante**

D1 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

D2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$

D3 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

D4 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$

D5 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

Vocabulaire
Les suites **monotones** sont les suites qui ne changent pas de variations.

♣ Méthode !
• On pourrait aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ; faut-il encore s'assurer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est différent de 0 et de signe constant... Ce n'est donc, en pratique, pas plus simple et je ne procéderai jamais ainsi.
• Parfois, l'énoncé demandera d'établir les variations par récurrence, en démontrant par exemple "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$".

Dans tous les cas, il faudra comparer u_n et u_{n+1} pour toutes les valeurs de n.

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier les variations d'une suite**, on peut étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemples 2

E1 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{n+1}$$

Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Réflexe !

Remarque
Inutile de développer le dénominateur : l'objectif est l'étude du signe ; et c'est plus simple sous forme factorisée.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

E2 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2^n}$$

Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^n} \\
&= \frac{3 - 3 \times 2}{2^{n+1}} \\
&= \frac{-3}{2^{n+1}} \\
&< 0
\end{aligned}$$

☞ Rappel...
$2^{n+1} = 2 \times 2^n$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

E3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

- Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\ &= u_n^2 - 2u_n + 1 \\ &= (u_n - 1)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 = 1$?
Dans ce cas, on a, d'après le calcul précédent :

$$u_1 - u_0 = (u_0 - 1)^2 = 0$$

Et donc

$$u_1 = u_0 = 1$$

De même :

$$u_2 - u_1 = (u_1 - 1)^2 = 0$$

Et donc

$$u_2 = u_1 = 1$$

Démontrons donc, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

  * **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Immédiat, car $u_0 = 1$. L'initialisation est vérifiée.
  * **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 1$. Démontrons que $u_{n+1} = 1$.
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - u_n + 1 \\ &= 1 - 1 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$u_n = 1$ par hypothèse de récurrence

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Autrement dit, si $u_0 = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

IV Majoration & minoration

Définitions 3 — **Suite majorée / minorée / bornée**

D1 Soit $M \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée par M** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
Le réel M est alors **un** majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

D3 Soit $m \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée par m** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
Le réel m est alors **un** minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D4 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant M$.

D5 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée.

✓ Rigueur !
On dit UN majorant. Car si M est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $M+1$, $M+2$,... le sont tous. Par conséquent, une suite majorée admet une infinité de majorants !

✘ Attention !
Quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, on dira souvent que la suite (v_n) majore la suite (u_n)... Mais cela ne signifie pas que la suite (u_n) est majorée !En effet, par définition, un majorant / minorant ne peut pas dépendre de la variable !

Exemples 3

E1 Une suite décroissante est majorée par son premier terme ; alors qu'une suite croissante est minorée par son premier terme (se démontre rapidement par récurrence).

E2 La suite de terme général $2 - n$ est majorée par 2.

E3 La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée par -1 et 1.

E4 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$.
Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 2.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
Immédiat, car $u_0 = 0$. L'initialisation est vérifiée.

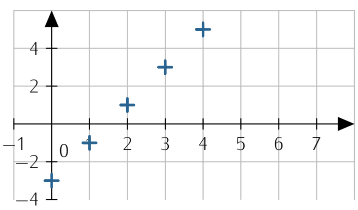
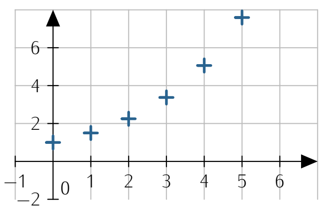
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Démontrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant 2$$
  D'où :
  $$2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$$
  Et ainsi, par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$:
  $$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4}$$
  Autrement dit :
  $$\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$
  D'où le résultat, puisque $\sqrt{2} \geqslant 0$. L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 2.

> ☞ **Rappels...**
> • Ne changent pas le sens des inégalités : additionner/soustraire, multiplier/diviser par un positif et appliquer une fonction croissante.
> • Changent le sens des inégalités : multiplier/diviser par un négatif et appliquer une fonction décroissante.

V Suites usuelles

V.1 Suites arithmétiques & suites géométriques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition	il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$	il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général à partir de u_0	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$
Terme général à partir de u_1	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 + (n-1)r$	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 q^{n-1}$
Terme général à partir de u_p	$\forall n \in [\![p;+\infty[\![,\ u_n = u_p + (n-p)r$	$\forall n \in [\![p;+\infty[\![,\ u_n = u_p q^{n-p}$
Graphiquement...	Suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme -3 :  ⇝ **Croissance linéaire** (points alignés)	Suite géométrique de raison $1,5$ et de 1er terme 1 :  ⇝ **Croissance exponentielle**
Somme de termes consécutifs	$= \text{nb de termes} \times \dfrac{1^{\text{er}} + \text{dernier terme}}{2}$	$= 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$ (si raison$\neq 1$) $= 1^{\text{er}}\text{ terme} \times \text{nb de termes}$ (si raison$= 1$)

> **Remarque**
> En fait, ces relations sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sauf si $q = 0$ pour les suites géométriques, car alors q^{-1} n'existe pas...) du moment que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique / géométrique à partir du rang 0.

> **Remarque**
> Je fais le choix d'énoncer ces formules sans expression mathématique... Mais leur démonstration le sera. Cela laisse le choix dans l'apprentissage !

★ Démonstration :

- Aucune difficulté pour l'expression des termes généraux, que l'on démontre proprement par récurrence.
- **Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :**
  Soient r un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![p;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} \big(u_p + (k-p)r\big) \\
&= \sum_{k=p}^{n} u_p + r\sum_{k=p}^{n}(k-p) && j = k - p \text{ dans la somme de droite} \\
&= (n-p+1)u_p + r\sum_{j=0}^{n-p} j \\
&= (n-p+1)u_p + r\frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \\
&= (n-p+1)\frac{2u_p + r(n-p)}{2} \\
&= (n-p+1)\frac{u_p + u_p + (n-p)r}{2} \\
&= (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}
\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

> ☞ **Rappel...**
> Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$:
> $$\text{Card}([\![a;b]\!]) = b - a + 1$$

- **Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :**
Soient q un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![p; +\infty[\![$.
  - Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à u_0 et ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} u_0 \\ &= (n-p+1)u_0\end{aligned}$$

  - Si $q \neq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} u_p q^{k-p} \\ &= u_p \sum_{k=p}^{n} q^{k-p} && \quad j = k-p \\ &= u_p \sum_{j=0}^{n-p} q^{j} && \quad q \neq 1 \\ &= u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\end{aligned}$$

  D'où le résultat.

$\star$

♣ Méthode 3 ♣ **Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique (resp. géométrique)**, on cherche généralement à établir qu'il existe $qqch \in \mathbb{R}$ tel que que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + qqch$ (resp. $u_{n+1} = u_n \times qqch$). Et pour cela, on part du membre de gauche pour retrouver le membre de droite.

Exemples 4

E1 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n + 7$ pour $n \in \mathbb{N}$. On reconnaît le terme général de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 3.

E2 Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$$

Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Déduisons-en (par sommation) son terme général ainsi que celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - u_n + 2 - u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - u_n + 2 \\ &= v_n + 2\end{aligned}$$

  Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 et de premier terme v_0, avec $v_0 = u_1 - u_1 = 1$.
- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + 2n$$

  Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k = 1 + 2k$$

  Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$.
  - Si $n \geqslant 1$:
  Sommons ce qui précède, pour k allant de 0 à $n-1$ (licite car $n - 1 \geqslant 0$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(1 + 2k)$$

  Or :
    × par télescopage :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) &= u_n - u_0 \\ &= u_n - 1\end{aligned}$$

À retenir...
Quand on a une expression de la forme $u_{k+1} = u_k + a_k$ et que l'on sait calculer $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$, alors il peut être intéressant de sommer la relation $u_{k+1} - u_k = a_k$ pour ensuite par télescopage, obtenir u_n...

× et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2k) &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= n + 2\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n + (n-1)n \\ &= n^2\end{aligned}$$

D'où :

$$u_n - 1 = n^2$$

Conclusion : $u_n = 1 + n^2$.

∗ Si $n = 0$:
On a :

$$u_0 = 1 = 1 + 0^2$$

La relation trouvée est donc encore valable quand $n = 0$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + n^2$.

♣ Méthode 4 ♣ **Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique (resp. géométrique)**, la donnée de trois termes consécutifs suffit !

Exemple 5

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + 3^n$, n'est ni arithmétique ni géométrique.
On a déjà :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 13$$

- Ainsi :

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

- Et :

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

V.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 4 — Suite arithmético-géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a = 0, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.} \\ \text{Si } b = 0, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique.} \\ \text{Si } a = 1, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique.}\end{array}\right\} \text{Nous exclurons ces cas-là dans la suite de notre étude.}$$

✗ Attention !
Hormis ces trois cas, une suite arithmético-géométrique n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Objectif : déterminer le terme général des suites arithmético-géométriques.

À l'aide d'observations graphiques, on voit que le point d'intersection entre la droite d'équation $y = ax + b$ et la première bissectrice a un rôle important... Et puisque $a \neq 1$, l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution $\dfrac{b}{1-a}$ (on parle de **point fixe** de la fonction $x \longmapsto ax + b$), que nous notons α. Nous avons donc deux informations à ce niveau-là :

$$\begin{cases}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b \\ \alpha = a\alpha + b\end{cases}$$

Ce qui donne, en soustrayant ces deux égalités membre à membre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$$

Ainsi, la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; on peut donc déterminer son terme général et en déduire celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

Ce qu'il faut retenir :

♣ Méthode 5 ♣ Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique :

- Résoudre l'équation $x = ax + b$ (on note α la solution ici).
- Poser la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$; et vérifier qu'elle est géométrique.
- En déduire le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \alpha$).

Exemple 6

Déterminons le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}x + 3 &\iff \frac{1}{2}x = 3 \\ &\iff x = 6 \end{aligned}$$

- Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 6$$

Démontrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

$u_n = v_n + 6$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme v_0, avec $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

- D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 6$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

♣ Méthode !

On pourrait procéder autrement en disant que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

D'après la résolution faite :

$$6 = \frac{1}{2} \times 6 + 3$$

D'où en soustrayant membre à membre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6)$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

✘ Attention !

Attention aux priorités de calculs... Ce résultat ne se simplifie pas !

V.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définitions 5 — Suite récurrente linéaire d'ordre 2

D1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe deux réels a, b tels que $(a, b) \neq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

D2 L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est alors appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Dans le cas où $(a, b) = (0, 0)$, on a simplement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc nulle à partir du rang 2...

Le théorème suivant va fournir les expressions possibles pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Théorème 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; et soit Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et :

$$\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule solution x_0 et :

$$\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\alpha n + \beta)x_0^n$$

☞ Pour info...

Le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme ; il fait intervenir les très fameux *nombres complexes*, que nous n'étudierons pas !

Remarque
Il est également possible, le résultat étant donné, de procéder par récurrence (double).

☞ **Rappel...**
Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2 et Δ sont discriminant associé.
• Si $\Delta > 0$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes de f.
• Si $\Delta = 0$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - x_0)^2$$
où x_0 est l'unique racine de P.
Les deux cas se regroupent et on a donc, si $\Delta \geqslant 0$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
où x_1 et x_2 sont éventuellement égales (dans le cas $\Delta = 0$).
En développant cette forme, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) \\ &= a(x^2 - Sx + P) \\ &= ax^2 - aSx + aP \end{aligned}$$
où S est la SOMME des racines et P leur PRODUIT.

★ Démonstration : Détaillons-la en plusieurs points.
Supposons que $\Delta \geqslant 0$ et notons x_1 et x_2 les deux racines, éventuellement égales, de $x \longmapsto x^2 - ax - b$.

1. Exprimons $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de a et b.
   D'après les relations coefficients-racines, on a :
$$x_1 + x_2 = a \quad ; \quad x_1x_2 = -b$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifions $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k)$.
   On a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k}u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-(k+1)}u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k}u_k \\ &= u_n - x_1^n u_0 \end{aligned}$$
télescopage

3. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - x_1u_n$. Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, puis déduisons-en son terme général.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - x_1u_{n+1} \\ &= au_{n+1} + bu_n - x_1u_{n+1} \\ &= (a - x_1)u_{n+1} + bu_n \\ &= x_2u_{n+1} - x_1x_2u_n \\ &= x_2(u_{n+1} - x_1u_n) \\ &= x_2v_n \end{aligned}$$
question précédente

     Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison x_1 et de premier terme v_0, avec $v_0 = u_1 - x_1u_0$.
   - D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_1 - x_1u_0)x_2^n$$

4. Supposons $b \neq 0$. Déduisons des questions précédentes, en distinguant les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$, le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2. :
$$\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k) = u_n - x_1^n u_0$$
   Mais, d'après la question 3. :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_{k+1} - x_1u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_1^{n-k-1}(u_1 - x_1u_0)x_2^k \\ &= (u_1 - x_1u_0)x_1^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k \end{aligned}$$
$b \neq 0$, donc $x_1 \neq 0$ (car $b = -x_1x_2$)

   - Si $\Delta > 0$:
     Dans ce cas, $x_1 \neq x_2$ et donc $\dfrac{x_2}{x_1} \neq 1$. D'où :
$$\begin{aligned} (u_1 - x_1u_0)x_1^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k &= (u_1 - x_1u_0)x_1^{n-1}\frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n}{1 - \frac{x_2}{x_1}} \\ &= (u_1 - x_1u_0)\frac{x_1^n}{x_1}\frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n}{1 - \frac{x_2}{x_1}} \\ &= (u_1 - x_1u_0)\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

     Et ainsi, d'après le résultat de la question 2. rappelé en début :
$$u_n = u_0x_1^n + (u_1 - x_1u_0)\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(u_0 + \frac{u_1 - x_1u_0}{x_1 - x_2}\right) x_1^n + \frac{x_1u_0 - u_1}{x_1 - x_2} x_2^n \\
&= \frac{u_1 - x_2u_0}{x_1 - x_2} x_1^n + \frac{x_1u_0 - u_1}{x_1 - x_2} x_2^n \qquad \text{en posant } \alpha = \frac{u_1 - x_2u_0}{x_1 - x_2} \text{ et } \beta = \frac{x_1u_0 - u_1}{x_1 - x_2} \\
&= \alpha x_1^n + \beta x_2^n
\end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$:
  Dans ce cas, $x_1 = x_2$ et donc $\dfrac{x_2}{x_1} = 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
(u_1 - x_1u_0)x_1^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k &= (u_1 - x_1u_0)x_1^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= (u_1 - x_1u_0)nx_1^{n-1}
\end{aligned}$$

  Et ainsi, d'après le résultat de la question 2. rappelé en début :

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0x_1^n + (u_1 - x_1u_0)nx_1^{n-1} \qquad x_1 \neq 0 \text{ (car } b \neq 0) \\
&= \left(u_0 + \frac{u_1 - x_1u_0}{x_1} n\right) x_1^n \qquad \text{en posant } \alpha = \frac{u_1 - x_1u_0}{x_1} \text{ et } \beta = u_0 \\
&= (\alpha n + \beta)x_1^n
\end{aligned}$$

On a donc établi les relations voulues pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et on vérifie ensuite rapidement (en reprenant les expressions de α et β dans chaque cas), qu'elles sont encore valables pour $n = 0$: c'est le cas !

5. Que dire si $b = 0$?
Supposons $b = 0$. Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1}$$

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = au_k$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison a. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1a^{n-1}$$

Or, $a \neq 0$ (sinon, on aurait $(a, b) = (0, 0)$), d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{u_1}{a} a^n \qquad n \geqslant 1, \text{ donc } 0^n = 0 \\
&= \frac{u_1}{a} a^n + \left(u_0 - \frac{u_1}{a}\right) \times 0^n \qquad \text{en posant } \alpha = \frac{u_1}{a} \text{ et } \beta = u_0 - \frac{u_1}{a} \\
&= \alpha a^n + \beta 0^n
\end{aligned}$$

Et cette relation est encore valable pour $n = 0$ (il suffit de remplacer les valeurs de α et β pour le vérifier).On retrouve bien le cas traité ci-dessus avec $\Delta > x0$, puisque a et 0 sont alors les solutions de l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

☞ Rappel...
Par convention, on considère que $0^0 = 1$.

⋆

Pour compléter :

♣ Méthode 6 ♣ Pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

- Poser et résoudre l'équation caractéristique associée.
- Déterminer α et β en utilisant les conditions initiales de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui sont souvent les valeurs de u_0 et u_1) : il faudra résoudre un petit système.

♥ Astuce du chef ♥
Les expressions des termes généraux sont identiques si la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang : les valeurs de α et β s'en trouveront juste changées...

Exemples 7

E1 La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

E2 Déterminons le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ;\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et 2.
Par conséquent, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$$

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, d'où : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$.

Mais :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\beta = 1 \end{cases}$$

✍ Rédaction
Je vous propose cette rédaction, courte, claire et complète : inutile d'introduire Δ, ni de détailler la résolution de l'équation caractéristique !

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{-1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3}2^n.$

Vérification
On vérifie les valeurs de u_0 et u_1 avec le résultat final...

V.4 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

C'est un cas très courant dont nous avons déjà rencontré des cas particuliers : les suites arithmético-géométriques. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une SAG, elle vérifie une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction affine.

Nous avons déjà vu comment représenter la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir méthode 1) ; mais son étude sera en général plus sophistiquée. Nous ne verrons pas de généralités, mais il est bon de retenir que :

♣ Méthode 7 ♣ **Pour étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$"** :

- il faut connaître le mieux possible la fonction f et essayer d'en utiliser les caractéristiques ;
- il va falloir très certainement raisonner par récurrence (pour justifier que u_n existe bien pour tout n, pour étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou pour montrer qu'elle est minorée/bornée...)

☞ Pour info...
Cette étude sera complétée et revue régulièrement durant l'année.

Exemple 8

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
  La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

  D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	e^{-1}	↘	

Remarque
Il n'est pas nécessaire de détailler le signe de $1-x$...

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    Immédiat, car $u_0 = 1$. L'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Démontrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
    Par hypothèse de récurrence :
    $$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
    D'où, par croissance de f sur $[0;1]$:
    $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$$
    Autrement dit :
    $$0 \leqslant u_{n+} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
    Or $\mathrm{e}^{-1} < 1$, donc par transitivité :
    $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
    L'hérédité est ainsi établie.

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$

- Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n\mathrm{e}^{-u_n} - u_n \\ &= u_n(\mathrm{e}^{-u_n} - 1) \end{aligned}$$

  Or :

Remarque
On aurait aussi pu démontrer directement par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$$

* d'après le point précédent

$$u_n \geqslant 0$$

* et comme $u_n \geqslant 0$, on a $-u_n \leqslant 0$; et donc, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-u_n} \leqslant e^0$$

D'où :

$$e^{-u_n} - 1 \leqslant 0$$

On en déduit :

$$u_n(e^{-u_n} - 1) \leqslant 0$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Remarque

On a ainsi montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 (car bornée entre 0 et 1). Nous verrons dans un prochain chapitre comment utiliser ces résultats pour poursuivre l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...