Exercices du chapitre 6
Généralités sur les suites et suites usuelles

Exercice 1 – ●○○ Retour sur le chapitre 1
Rappeler l'écriture quantifiée de chaque phrase puis en écrire la négation.
On désignera par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang (on dit qu'elle est **stationnaire**).
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2 – ●○○ - Variations de suites
Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on donne le terme général.

1. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 – ●○○ - Avec une suite auxiliaire
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

On considère également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 – ●●○ - Avec une suite auxiliaire (bis)
Considérons les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(u_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 4$.
2. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n.
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$.
5. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5 – ●●○ - Avec une suite auxiliaire (ter)
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique puis en déduire son terme général.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Sans utiliser ni le programme de la question 1., ni le résultat de la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **somme_(n)** renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 6 - ●○○ - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
3. 3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$.
   3.b. Conclure quant aux variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 - ●●○ Suite récurrente d'ordre 1 (fonction décroissante)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} \end{array}\right.$$

1. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$$

2. Qu'en déduire sur les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 8 - ●●○ - Trouver le terme général

Dans chaque cas, écrire un code **Python** permettant de calculer et d'afficher les premiers termes de la suite donnée puis conjecturer son terme général. Démontrer ensuite la conjecture trouvée.

1. $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n \times u_n \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{array}\right.$

Exercice 9 - ●●○ - Suites imbriquées

Considérons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + 2b_n \end{array}\right.$$

L'objectif est de déterminer les termes généraux de ces deux suites.

1. Écrire une fonction **Python** prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.
2. **Méthode 1 :**
   On considère les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ d_n = a_n - b_n$$

   2.a. Démontrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   2.b. Démontrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   2.c. En déduire le terme général des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. **Méthode 2 :**
   Cette question est à traiter sans utiliser les résultats de la méthode 1.
   3.a. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   3.b. En déduire le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.