7

Probabilités

Variables aléatoires à densité

Introduction...

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble discret (essentiellement à valeurs dans $\mathbb{N}$ même). Or, de façon générale (au programme d'ECG du moins), les variables aléatoires sont à valeurs réelles.
Dans ce chapitre, nous étudierons un certain type de variables aléatoires qui ne sont pas discrètes : les variables aléatoires à densité.
Attention, comme nous le verrons, il existe des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes ni à densité. Leur étude n'est pas au programme, même si quelques connaissances sont à avoir...

Sans doute que la plus célèbre des lois à densité est la *loi normale*. Nous l'étudierons dans le chapitre 11 et elle sera également à l'honneur dans les chapitres 13 et 16.

Les premières variables aléatoires non discrètes ont été étudiées au XVIIIème siècle, même si le formalisme n'est absolument pas celui étudié depuis. Sans rentrer dans la théorie de la mesure, nous étudierons les premiers aspects des variables aléatoires à densité qui ont ancré davantage encore le lien entre l'analyse et les probabilités, offrant peut-être à ces dernières une place à part entière dans le paysage mathématique actuel.

Pour bien démarrer...

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω. Définition et propriétés de la fonction de répartition de X.

   - **Définition.** La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \end{array} \right.$.
   - **Propriétés.**
     - ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.
     - ⋆ F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
     - ⋆ Pour tout $x \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite en x et admet une limite finie à gauche en x.
     - ⋆ La fonction de répartition caractérise la loi.

2. Une variable aléatoire est discrète si, et seulement si, sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3. Théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire discrète.
   Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
   La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ est absolument convergente et dans ce cas $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$ est la somme de cette série.

4. Intégrales impropres usuelles :

   - L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ est convergente si, et seulement si, $a > 1$.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^a}dt$ est convergente si, et seulement si, $a < 1$.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}dt$ est convergente si, et seulement si, $a > 0$.

5. Critères sur les intégrales impropres :
   Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

   - Par inégalité :
     - ⋆ $\left.\begin{array}{l} \forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$
     - ⋆ $\left.\begin{array}{l} \forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$
   - Par négligeabilité :
     - ⋆ $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$
     - ⋆ $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$
   - Par équivalence :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ ont même nature}\right)$$

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace. On notera F_X la fonction de répartition de X.

I Définitions et premiers exemples

I.1 Variable aléatoire à densité

Définition 1 — **Variable aléatoire à densité**

La variable aléatoire X **est à densité** lorsque sa fonction de répartition est :

- ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ saut éventuellement en un nombre fini de points.

On sait déjà que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$... Et réciproquement :

Théorème 1

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si F est :

- ✓ croissante sur $\mathbb{R}$,
- ✓ telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
- ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire à densité dont F est la fonction de répartition.

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

Exemples 1

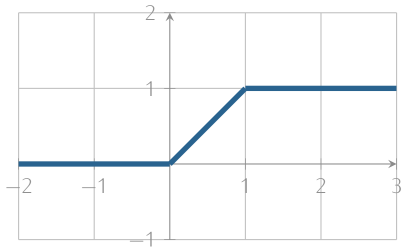
E1 Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$; elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

> ☞ **Rappel...**
> La réciproque est vraie : si F_X est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors X est discrète.

Conclusion : les variables aléatoires discrètes ne sont pas à densité.

E2 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Représentons F_X et montrons que la variable aléatoire X est à densité.



- ✓ **Continuité.**
  - ⋆ Sur $]-\infty; 0[$: F_X est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
  - ⋆ Sur $]0; 1[$: F_X est continue sur $]0; 1[$ car polynomiale sur cet intervalle.
  - ⋆ Sur $]1; +\infty[$: F_X est continue sur $]1; +\infty[$ car constante sur cet intervalle.
  - ⋆ En 0 :
  $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F_X(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F_X(x) = 0 \quad ; \quad F_X(0) = 0$$
  Donc F_X est continue en 0.
  - ⋆ En 1 : de la même façon, F_X est continue en 1.

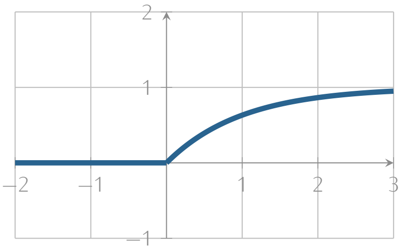
  Conclusion : F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- ✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité, F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

> ♣ **Méthode !**
> On sait déjà que F_X est une fonction de répartition... Il suffit donc de vérifier la définition 1.

> **Petite remarque**
> En fait, F_X est continue sur $[0; 1]$; autrement dit, F_X est continue en 0 à droite et en 1 à gauche... Mais on préfère travailler sur les intervalles pour régler le cas "$\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points" de la même façon !

Conclusion : la variable aléatoire X est à densité.

E3 Considérons la fonction $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Démontrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.



✓ **Continuité.**

- ⋆ Sur $]-\infty; 0[$: F est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- ⋆ Sur $]0; +\infty[$: F est continue sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles continues sur cet intervalle.
- ⋆ En 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = 0 \quad ; \quad F(0) = 0$$

Donc F est continue en 0.

Conclusion : F est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

✓ **Croissance.**

- ⋆ Sur $]-\infty; 0[$: F est croissante sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- ⋆ Sur $[0; +\infty[$: $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque F est continue en 0, on en déduit que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

✓ **Limites.**

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$$

> **Conclusion :** F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Méthode !
Ici, on ne sait pas que F est une fonction de répartition ; on met donc en place le théorème 1.

♡ Astuce du chef ! ♡
On commence par la continuité et le caractère $\mathscr{C}^1$ qui peuvent être utiles pour l'examen de la croissance...

Important !
L'argument de continuité en 0 est indispensable pour assurer la croissance sur $\mathbb{R}$ en "recollant" les deux morceaux... Il faut avoir un exemple (graphique ou algébrique) d'une fonction g non continue en 0, croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $[0; +\infty[$ sans être croissante sur $\mathbb{R}$.

E4 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \max(1, X)$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leqslant 1 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 1 \end{cases}$$

Montrons que Y n'est ni discrète ni à densité.

- Déterminons la fonction de répartition de Y, notée F_Y.
  - ⋆ Par définition de Y, on a déjà :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) \geqslant 1$$

D'où :

$$Y(\Omega) \subset [1; +\infty[$$

  - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$.
    - ⋄ Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x < 1 \text{ et } Y(\Omega) \subset [1; +\infty[, \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$

    - ⋄ Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([\max(1, X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([1 \leqslant x] \cap [X \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) && x \geqslant 1, \text{ donc } [1 \leqslant x] = \Omega \\ &= F_X(x) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x} && x \geqslant 1, \text{ donc } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

- Et F_Y n'est pas constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc la variable aléatoire Y n'est pas discrète.
- Remarquons alors que F_Y n'est pas continue en 1, donc la variable aléatoire Y n'est pas à densité.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Y n'est ni discrète ni à densité.

Confusion d'objets !
Le "1" de $\max(1, X)$ désigne une variable aléatoire constante égale à 1, pas le réel 1...

☞ Rappel...
$\forall a, b, x \in \mathbb{R}$,

$$\max(a, b) \leqslant x \iff \begin{cases} a \leqslant x \\ b \leqslant x \end{cases}$$

À retenir...
La fonction de répartition d'une variable aléatoire Z est nulle "avant $Z(\Omega)$" et égale à 1 "après" $Z(\Omega)$.

I.2 Densité de probabilité

Définition 2 — **Densité d'une variable aléatoire**

Soient X une variable aléatoire à densité et F_X sa fonction de répartition.
Une **densité de X** est une fonction f_X, définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

- ✓ $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) \geqslant 0$,
- ✓ en tout réel x en lequel F_X est $\mathscr{C}^1$, $f_X(x) = F_X'(x)$.

✗ Attention !
- Puisque F_X n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^1$ partout, ces deux items ne définissent pas toujours une unique fonction.
Par conséquent, on parlera d'**une** densité.
- f_X ne sera pas continue là où F_X n'est pas $\mathscr{C}^1$.
- Si F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il n'y a qu'une seule densité : F_X', qui est alors continue sur $\mathbb{R}$.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour montrer que X est à densité et en donner une densité :**

- on montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- on obtient une densité de X en :
  - ⋆ dérivant F_X en tout point en lequel elle est $\mathscr{C}^1$ (on dérive donc sur les intervalles ouverts),
  - ⋆ donnant une valeur arbitraire positive éventuellement ailleurs.

☞ Pour info...
Donner la loi d'une variable aléatoire à densité c'est en donner une densité.

Exemple 2

Reprenons la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On sait déjà (Exemples 1 - E2) que la variable aléatoire X est à densité. Donnons-en une densité.
Notons f_X une densité de X.

- On a :

$$\forall x \in]-\infty;0[,\ f_X(x) = F_X'(x) = 0$$
$$\forall x \in]0;1[,\ f_X(x) = F_X'(x) = 1$$
$$\forall x \in]1;+\infty[,\ f_X(x) = F_X'(x) = 0$$

- et on pose :

$$f_X(0) = 1 \quad ; \quad f_X(1) = 1$$

Conclusion : la fonction $f_X : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de X.

Petite remarque
En pratique, on ne prend par des valeurs complètement arbitraires...
On pourrait faire preuve d'originalité, mais on ne le fait pas !
On a pour habitude de prolonger par continuité (quand c'est possible) sur un des intervalles.

Petite remarque
Sont également des densités de X les fonctions :
$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et
$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ...

On sait déjà comment, à partir de la fonction de répartition, obtenir une densité. Réciproquement :

Théorème 2 — **Lien densité / fonction de répartition**

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

★Subtil...★
Puisque f_X n'est pas nécessairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (même si ce sera généralement le cas), cette intégrale peut en fait être impropre en des points intermédiaires entre $-\infty$ et x...

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

On peut trouver une densité à partir de la fonction de répartition ; et réciproquement... Or, donner une densité de X, c'est en donner la loi...
Par conséquent, on retrouve le résultat suivant, très utile sur les variables aléatoires à densité : **la fonction de répartition caractérise la loi**.

Finalement, si f_X est une densité de X, on a :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$,
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (en lesquels F_X n'est pas $\mathscr{C}^1$),
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$.

Petite remarque
Si f_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors F_X sera $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement :

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Si :

- ✓ f est positive sur $\mathbb{R}$,
- ✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire dont f est une densité.

Petite remarque
On a vu un résultat analogue dans le cas des VA discrètes...

Vocabulaire
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Démonstration : Théorème admis.

Exemples 3

E1 Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ est une densité de probabilité.

✓ **Positivité.** On a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$$

✓ **Continuité.** Les fonctions valeur absolue et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f est également continue sur $\mathbb{R}$.

Petite remarque
Puisque la continuité de f a déjà été examinée, inutile de le refaire au moment d'étudier l'intégrale impropre...

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

⋆ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$?

Soit $B \in [0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^B f(x)dx &= \int_0^B \frac{1}{2}e^{-|x|}dx \qquad \forall x \geqslant 0,\ |x| = x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^B e^{-x}dx\\ &= \frac{1}{2}\big[-e^{-x}\big]_0^B\\ &= \frac{1}{2}(-e^{-B}+1)\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{2}(-e^{-B}+1) = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

⋆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$?

Par parité de f, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est aussi convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et par relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

E2 Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité et déterminons la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.

- ✓ **Positivité.** On a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$$

✓ **Continuité.**

- ◇ Sur $]-\infty;-1]$: la fonction f est continue sur $]-\infty;-1]$ comme inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur cet intervalle.
- ◇ Sur $[1;+\infty[$: de même, f est continue sur $[1;+\infty[$.
- ◇ Sur $]-1;1[$: f est continue sur $]-1;1[$ car constante sur cet intervalle.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1.

Petite remarque
f est continue en -1 à gauche et en 1 à droite...

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

◇ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Puisque f est nulle sur $]-1;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ est convergente et vaut 0.

◇ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$?

Soit $B \in [1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^B f(x)dx &= \int_1^B \frac{1}{2x^2}dx && \forall x \geqslant 0,\ |x| = x\\
&= \frac{1}{2}\int_1^B \frac{1}{x^2}dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^B\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{B}+1\right)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

◇ $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$?

Par parité de f, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est aussi convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et par relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

- Notons F_X la fonction de répartition de X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  ⋆ Si $x \leqslant -1$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\left([X \leqslant x]\right)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && \text{car } x < -1\\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{t}\right]_{t\to-\infty}^{x}\\
&= \frac{-1}{2x}
\end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡

Pour calculer $F_X(x)$, on distingue les valeurs de x comme c'est le cas dans l'expression de la densité de X fournie.

✍ Rédaction

La convergence de l'intégrale calculée est déjà assurée ; on peut donc s'autoriser la notation $\left[\frac{-1}{t}\right]_{t\to-\infty}^{x}$ pour épurer la rédaction.

- Si $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\left([X \leqslant x]\right)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && \text{relation de Chasles}\\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt && \text{car } x \in]-1;1[\\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} 0dt && \text{calcul fait précédemment}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\left([X \leqslant x]\right)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && \text{relation de Chasles}\\
&= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt && \text{calculs précédents, car } x \geqslant 1\\
&= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+1\right) && \text{calcul fait précédemment}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2x}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_x(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-1;1[\\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Vérification

Puisque F_X est une fonction de répartition, on vérifie rapidement que :
- F_X est positive ;
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$;

et puisque X est à densité, on vérifie également :
- F est continue sur $\mathbb{R}$.

Bien évidemment, on pourrait vérifier que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et que, là où c'est possible, $F'_X(x) = f_X(x)$... Mais les vérifications précédentes garantissent le bon résultat !

Là où f_X est nulle, F_X est constante ; et réciproquement.

I.3 Calculs de probabilités

Propriétés 1

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X.

P1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0$$

P2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X < x]\big) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X > x]\big) &= \mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big) \\ &= 1 - F_X(x) \\ &= \int_{x}^{+\infty} f_X(t)dt \end{aligned}$$

P3 Pour tous réels a, b tels que $a \leqslant b$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) &= \mathbb{P}\big([a < X \leqslant b]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([a \leqslant X < b]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([a < X < b]\big) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{a}^{b} f_X(t)dt \end{aligned}$$

☞ Pour info...

On voit bien que la loi d'une VA à densité ne peut donc pas être la donnée de $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme pour les VA discrètes...

Petite remarque

Puisque f_X est positive, $\int_a^b f_X(t)dt$ est l'aire sous la courbe de f_X.

★ Démonstration :

P1. Soit $x \in \mathbb{R}$. De façon générale, on sait que $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ est égale à la hauteur du saut de continuité de F_X en x. Or, X est à densité, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en x.
Par conséquent : $\mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0$.

P2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) &= \mathbb{P}\big([X = x] \cup [X < x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X = x]\big) + \mathbb{P}\big([X < x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X < x]\big) \end{aligned}$$

$[X = x]$ et $[X < x]$ sont incompatibles

P1

Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \end{aligned}$$

théorème 2

- On a :

$$\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([X = x] \cup [X > x]\big)$$

$[X = x]$ et $[X > x]$ sont incompatibles

☞ Pour info...

En fait : $\mathbb{P}\big([X = x]\big) = F_X(x) - \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t)$ (et $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = \mathbb{P}\big([X < x]\big)$).
Ce résultat pourrait être démontré avec le théorème de limite monotone sur les probabilités, qui n'est plus au programme...

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\big([X = x]\big) + \mathbb{P}\big([X > x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X > x]\big) && \text{P1} \\
&= \mathbb{P}\big(\overline{[X \leqslant x]}\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\
&= 1 - F_X(x) && \text{théorème 2} \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt && f_X \text{ est une densité de probabilité} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt + \int_{x}^{-\infty} f_X(t)dt && \text{relation de Chasles} \\
&= \int_{x}^{+\infty} f_X(t)dt
\end{aligned}
$$

P3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. De la même façon que précédemment, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) &= \mathbb{P}\big([a < X \leqslant b]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([a \leqslant X < b]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([a < X < b]\big)
\end{aligned}
$$

Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X \leqslant b]\big) &= \mathbb{P}\big([X < a] \cup [a \leqslant X \leqslant b]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X < a]\big) + \mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) && [X < a] \text{ et } [a \leqslant X \leqslant b] \text{ sont incompatibles}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant b]\big) - \mathbb{P}\big([X < a]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X \leqslant b]\big) - \mathbb{P}\big([X \leqslant a]\big) && \text{P2} \\
&= F_X(b) - F_X(a) \\
&= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt + \int_{a}^{-\infty} f_X(t)dt && \text{relation de Chasles} \\
&= \int_{a}^{b} f_X(t)dt
\end{aligned}
$$

⋆

Exemple 4

Reprenons la variable aléatoire introduite dans Exemples 3 - E2.
Déterminons :

$$
\mathbb{P}\big([X \leqslant 3]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X \geqslant 2]}\big([X \leqslant 3]\big)
$$

- On a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X \leqslant 3]\big) &= F_X(3) \\
&= 1 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

- Et :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([X < 2]\big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\big([X \leqslant 2]\big) && X \text{ est à densité} \\
&= 1 - F_X(2) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

- Puisque $\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big) \neq 0$:

$$
\mathbb{P}_{[X \geqslant 2]}\big([X \leqslant 3]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([X \geqslant 2] \cap [X \leqslant 3]\big)}{\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big)}
$$

$$= \frac{\mathbb{P}([2 \leqslant X \leqslant 3])}{\mathbb{P}([X \geqslant 2])}$$
$$= \frac{F_X(3) - F_X(2)}{\mathbb{P}([X \geqslant 2])} \quad X \text{ est à densité}$$
$$= \frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{3}$$

II Transformation d'une variable aléatoire

Considérons une variable aléatoire X à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Pour toute fonction g définie et **continue** sur $X(\Omega)$, on peut définir la variable aléatoire $Y = g(X)$.
Traitons quelques cas classiques...

✘ Attention !
$g(X)$ n'est pas forcément à densité : voir Exemples 1 - E4. En revanche, la continuité de g assure que c'est bien une VA (dans le cas discret, la continuité n'était pas nécessaire pour que $g(X)$ soit une VA).

♣ Méthode 2 ♣ **Pour déterminer si la variable aléatoire $Y = g(X)$ est à densité et, le cas échéant, en donner une densité :**

- on commence par réfléchir à $Y(\Omega)$ (une inclusion suffit, mais on a parfois une égalité...),
- on détermine la fonction de répartition de Y (on veille à bien justifier les égalités d'évènements en jeu...),
- on regarde si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- si c'est le cas, alors on donne une densité en dérivant F_Y là où elle est $\mathscr{C}^1$ et en donnant des valeurs "arbitraires positives" ailleurs (**attention à la dérivée d'une composée...**).

☞ Rappel...
Quand cela a du sens :
$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Quand l'énoncé donnera une densité f_X de X, on prendra souvent comme $X(\Omega)$ l'ensemble sur lequel f n'est pas nulle ou bien "le plus petit" ensemble E tel que $\displaystyle\int_E f_X(t)dt = 1$...

Exemples 5

Dans tous ces exemples, on considère une variable aléatoire X de densité f_X, continue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F_X. On considère également que $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

E1 Montrons que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité et donnons-en un densité.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a déjà $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \quad x < 0 \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing$$

  - ⋆ Si $x \geqslant 0$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(x) - F_X(-x) \quad x \geqslant 0 \quad X \text{ est à densité}$$

☞ Rappel...
$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$:
$$|y| \leqslant a \iff -a \leqslant y \leqslant a$$

  Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_y(x) = \begin{cases} F_X(x) - F_X(-x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ensuite :
  ✓ **Continuité.**
  - ◇ Sur $]-\infty; 0[$: F_Y est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
  - ◇ Sur $]0; +\infty[$: puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$; donc $x \longmapsto F_X(-x)$ également. Donc F_Y est continue sur $]0; +\infty[$.
  - ◇ En 0 :
    d'une part

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0$$

d'autre part, par composition et puisque F_X est continue en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$$

Dès lors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F_Y(x) = F_Y(0)$$

Par conséquent, F_Y est continue en 0.

Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité et comme F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité et que f_X est supposée continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Par conséquent, Y est une variable aléatoire à densité et en notant f_Y une de ses densités :

⋆ pour tout $x \in]-\infty; 0[$:

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$

et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= F_X'(x) - \big(-F_X'(-x)\big) \\ &= f_X(x) + f_X(-x) \end{aligned}$$

⋆ on pose $f_Y(0) = 0$.

Petite remarque — Une autre valeur naturelle aurait été $2f_X(0)$...

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \longmapsto \begin{cases} f_X(x) + f_X(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

E2 Montrons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et donnons-en un densité.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et que $a \neq 0$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

Pourquoi ? — L'image de $\mathbb{R}$ par une fonction affine non constante est $\mathbb{R}$!

- Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([aX + b \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([aX \leqslant x - b]\big) \end{aligned}$$

Distinguons alors deux cas :

⋆ Si $a > 0$:
On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

⋆ Si $a < 0$:
On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &\overset{X \text{ est à densité}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

- Or, la fonction $x \longmapsto \dfrac{x-b}{a}$ est une fonction affine, elle est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

✓ **Continuité.** Puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \longmapsto F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Dans les deux cas, F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Puisque X est à densité et que X est supposée continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; donc $x \longmapsto F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Dans les deux cas, F_Y est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Petite remarque — En pratique, F_X ne sera peut-être pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier... Mais cela ne changera pas grand chose !

Par conséquent, la variable aléatoire Y est à densité et en notant f_Y une densité de Y, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

⋆ si $a > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \frac{1}{a} F_X' \left(\frac{x-b}{a} \right) \\ &= \frac{1}{a} f_X \left(\frac{x-b}{a} \right) \end{aligned}$$

⋆ si $a > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= -F_Y'(x) \\ &= -\frac{1}{a} F_X' \left(\frac{x-b}{a} \right) \\ &= -\frac{1}{a} f_X \left(\frac{x-b}{a} \right) \end{aligned}$$

✘ Attention !
Dérivée d'une composée !

Dans les deux cas :

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \longmapsto \dfrac{1}{|a|} f_X \left(\dfrac{x-b}{a} \right)$.

E3 Montrons que la variable aléatoire $Y = \exp(X)$ est à densité et donnons-en un densité.

- On a déjà :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(\exp(X) \big)(\Omega) \\ &= \exp \big(X(\Omega) \big) \\ &= \exp(\mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

- Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

  ⋆ Si $x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x \leqslant 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$, donc $[Y \leqslant x] = \varnothing$

  ⋆ Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\exp(X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant \ln(x)]\big) \\ &= F_X\big(\ln(x)\big) \end{aligned}$$

stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$

Important !
La **stricte** croissance de $\ln$ est nécessaire ! En effet, l'égalité des probabilités provient ici de l'égalité des évènements $[\exp(X) \leqslant x]$ et $[X \leqslant \ln(x)]$.
Or, pour s'assurer de cette égalité, il faut que pur tout $\omega \in \Omega$, les assertions $\exp(X(\omega)) \leqslant x$ et $X(\omega) \leqslant \ln(x)$ soient équivalentes...
Ce qui est garanti par la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou de exp sur $\mathbb{R}$).

  Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_y(x) = \begin{cases} F_X\big(\ln(x)\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ensuite :

  ✓ **Continuité.**

  ◇ Sur $]-\infty; 0[$: F_Y est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.

  ◇ Sur $]0; +\infty[$:

    ▷ ln est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

    ▷ puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

  Donc F_Y est continue sur $]0; +\infty[$.

  ◇ En 0 :
  d'une part

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0$$

  d'autre part :

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$;

▷ $\lim\limits_{A\to-\infty} F_X(A) = 0$, car F_X est une fonction de répartition.

Donc par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F_Y(x) = 0$$

Dès lors :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_Y(x) = F_Y(0)$$

Par conséquent, F_Y est continue en 0.

Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité et comme F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité et que f_X est supposée continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Par conséquent, Y est une variable aléatoire à densité et en notant f_Y une de ses densités :

⋆ pour tout $x \in]-\infty; 0[$:

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$

et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \frac{1}{x} F_X'\big(\ln(x)\big) \\ &= \frac{1}{x} f_x\big(\ln(x)\big) \end{aligned}$$

⋆ on pose $f_Y(0) = 0$.

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} f_X\big(\ln(x)\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

E4 Dans le cas $Y = X^2$: voir QCl29.

III Moments d'une variable aléatoire à densité

III.1 Espérance

Définition 3 — Espérance d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X.

On dit que la variable aléatoire X admet **une espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_{X(\Omega)} t f_X(t) dt$$

Petite remarque

On ne peut que voir l'analogie avec les variables aléatoires discrètes... N'est-ce pas ?!

Exemples 6

E1 Considérons une variable aléatoire X de densité la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$ (Exemples 3 - E1). Justifions que X possède une espérance et calculons-la.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t) dt$ est convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t| f(t) dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t| f(t) dt$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -t f(t) dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f(t) dt$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f(t) dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f(t) dt$ sont convergentes

- $\star$ **Pour** $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

    - ◇ La fonction $t \longmapsto tf(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
    - ◇ Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $tf(t) = \dfrac{1}{2}te^{-t}$. Et :
        - ▷ par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}t^3e^{-t} = 0$. Par conséquent :

$$tf(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

        - ▷ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente (exposant 2 et $2 > 1$).
        - ▷ $\forall t \in [0;+\infty[$, $tf(t) \geqslant 0$; $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$

    Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

Petite remarque
On pourrait calculer la valeur de cette intégrale (comment ?), mais ce n'est pas nécessaire ici.

  Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

- $\star$ **Pour** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$.

  On sait que :
  - ✓ la fonction f est paire, donc la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est impaire,
  - ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

  Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= 0\end{aligned}$$

relation de Chasles, licite car les deux intégrales en jeu sont convergentes

E2 Considérons une variable aléatoire X de densité la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (Exemples 3 - E2). Justifions que X ne possède pas d'espérance.

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ est convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} |x|f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|f(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} |x|f(x)dx$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} -xf(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ sont convergentes (car f est nulle sur $]-1;1[$)

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{-1}{2x}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ sont convergentes

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est divergente. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ est divergente.

Conclusion : X n'admet pas d'espérance.

On retrouve les propriétés habituelles sur l'espérance (linéarité, croissance) qui sont rappelées en fin de chapitre.

Et, comme pour les variables aléatoires discrètes, on peut déterminer l'espérance de $g(X)$ en connaissant seulement une densité de X, sans connaître une densité de $g(X)$...

Théorème 4 — de transfert

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X nulle en dehors de $X(\Omega)$ ainsi que g une fonction continue sur $X(\Omega)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$$

En gros... Si f est nulle en dehors d'un intervalle $]a;b[$ (avec $a,b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$), alors $g(X)$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_a^b g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant : $\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \displaystyle\int_a^b g(t)f_X(t)dt$.

Important ! Cas particulier important. Sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt$$

Démonstration : Théorème admis.

III.2 Variance et écart-type

Définition 4 — Moments d'une variable aléatoire

Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance.
Dans ce cas, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$.

Petite remarque Le moment d'ordre 1 est l'espérance... Le moment d'ordre 2 nous intéressera particulièrement... et on le calculera à l'aide du théorème de transfert !

On retrouve l'analogie avec le cas discret :

Propriété 2

Si $X(\Omega)$ est borné, alors X admet un moment à tout ordre.

Démonstration : Supposons que $X(\Omega)$ est borné. Il existe alors un réel positif a, que nous considérons ensuite, tels que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ |X(\omega)| \leqslant a$$

On peut alors considérer une densité f_X de X qui est nulle en dehors de $[-a;a]$.

- Dans ce cas :

X admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$ est absolument convergente
si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f_X(t)dt$ est convergente
si, et seulement si, $\in_{-a}^{a} |t|f_X(t)dt$ est convergente, car f est nulle en dehors de $[-a;a]$

- Or, pour tout $t \in [-a;a]$:

$$0 \leqslant |t| \leqslant a$$

On a ainsi :

✓ par positivité de f_X :

$$\forall t \in [-a;a],\ 0 \leqslant |t|f_X(t) \leqslant af_X(t)$$

✓ $\displaystyle\int_{-a}^{a} f_X(t)dt$ est convergente (car f_X est une densité de probabilité).

Donc par critère de comparaison (par inégalité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} |t|f_X(t)dt$ est convergente.

Conclusion : X admet une espérance.

Théorème 5

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X ainsi que $r \in \mathbb{N}^*$.
Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment de tout ordre inférieur ou égal à r.

Démonstration : Supposons que X admette un moment d'ordre r. Ainsi, par théorème de transfert, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r|f_X(t)dt$ est convergente.
Soit $q \in [\![1;r]\!]$.
Puisque la fonction $t \longmapsto t^q$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale, puisque $q \in \mathbb{N}^*$), d'après le théorème de transfert, on a :

Idée de la démonstration On suppose la CV de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r|f_X(t)dt$ pour établir la CV de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^q|f_X(t)dt$... en utilisant le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive.

$$X \text{ admet un moment d'ordre } q \quad \text{si, et seulement si,} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^q f_X(t)dt \text{ est absolument convergente}$$
$$\text{si, et seulement si,} \quad \int_{-\infty}^{0} |t|^q f_X(t)dt \text{ et } \int_{0}^{+\infty} |t|^q f_X(t)dt \text{ sont convergentes}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Si $|t| \leqslant 1$:
  Alors, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^q$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :
  $$|t|^q \leqslant 1$$
- Si $|t| > 1$:
  On a :
  $$q \leqslant r$$
  D'où, en multipliant par $\ln(|t|) > 0$ (car $|t| > 1$) :
  $$q\ln(|t|) \leqslant r\ln(|t|)$$
  Et, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
  $$\exp\left(q\ln(|t|)\right) \leqslant \exp\left(r\ln(|t|)\right)$$
  Autrement dit :
  $$|t|^q \leqslant |t|^r$$

Dans les deux cas, on obtient :
$$|t|^q \leqslant 1 + |t|^r$$
Or, $f_X(t) \geqslant 0$, d'où :
$$|t|^q f_X(t) \leqslant f_X(t) + |t|^r f_X(t)$$
On a ainsi :

- $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |t|^q f_X(t) \leqslant f_X(t) + |t|^r f_X(t)$.
- Mais :
  - $\star$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est une intégrale convergente (égale à 1, car f_X est une densité de probabilité), donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_X(t)dt$ sont convergentes ;
  - $\star$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f_X(t)dt$ est une intégrale convergente (car X admet un moment d'ordre r, et par théorème de transfert, la fonction $t \longmapsto t^r$ étant continue sur $\mathbb{R}$), donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|^r f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t|^r f_X(t)dt$ sont convergentes.

  Par conséquent : les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(f_X(t) + |t|^r f_X(t)dt\right)$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(f_X(t) + |t|^r f_X(t)dt\right)$ sont convergentes.

Ainsi, en appliquant deux fois le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t^q| f_X(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |t^q| f_X(t)dt$ sont convergentes. D'où l'existence du moment d'ordre q de X.

$\star$

DÉFINITIONS 5 — **VARIANCE & ÉCART-TYPE**

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

D1 On dit que la variable aléatoire X admet une **variance** lorsque $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, on note $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$ (*qui est donc un nombre positif*).

D2 Si X admet une variance, alors on note $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$: c'est l'**écart-type** de X.

> **☞ Pour info...**
> Puisque $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \geqslant 0$, les cas où X n'admet pas de variance sont les cas où cette variance est *infinie* : les valeurs de X qui ont un poids important sont trop étalées...

A nouveau, la petite formule qui fait plaisir pour le calcul de la variance :

THÉORÈME 6 — **FORMULE DE KOENIG-HUYGENS**

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.
X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2 ; et dans ce cas :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

> **Petite remarque**
> D'après les théorèmes 2 et 3 : si X admet une variance, alors elle admet une espérance (heureusement, vue la formule de KH).
> La réciproque est utile : si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.

$\star$ DÉMONSTRATION : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Raisonnons par double implication pour démontrer l'équivalence, mais commençons déjà par développer $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$:
$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$
Ensuite...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que X admette une variance. D'après l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$X^2 = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 + 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Mais X admet une variance, donc $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ admet une espérance ; tout comme X et $\mathbb{E}(X)^2$ (qui est une variable aléatoire constante).
Donc X^2 est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance.
Autrement dit, X admet un moment d'ordre 2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que X admette un moment d'ordre 2.
On avait :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Mais comme X admet un moment d'ordre 2, X^2 admet une espérance ; ce qui est également le cas de X et $\mathbb{E}(X)$.
Donc $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance. Autrement dit, X admet une variance.

Et, si X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\big(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2\big) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2
\end{aligned}$$

⋆

Important !
Parfois, l'énoncé fait calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ puis demander d'en déduire $\mathbb{V}(X)$...
Il suffit de remarquer que : $\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, pour ensuite avoir $\mathbb{E}(X^2)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

♣ Méthode 3 ♣ **Pour étudier l'existence et, le cas échéant, calculer une variance :**
on regarde si X admet un moment d'ordre 2 (avec le théorème de transfert), puis deux cas :

- si non, alors X n'a pas de variance ;
- si oui, alors on calcule $\mathbb{E}(X^2)$, puis on calcule $\mathbb{V}(X)$ avec la formule de Koenig-Huygens.

Exemple 7

La variable aléatoire X (Exemples 7 - E2) n'admet pas d'espérance ; elle n'admet donc pas de moment d'ordre 2 et pas non-plus de variance.

Là encore, les propriétés habituelles sur la variance sont encore valables et sont rappelées en fin de chapitre.

III.3 Variable aléatoire centrée, réduite, centrée & réduite.

Définitions 6 — VA centrée / réduite

D1 Si X admet une espérance, on dit que X est **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

D2 Si X admet une variance, on dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = 1$.

Propriété 3

Si X admet une espérance et une variance et si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors :

- la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée ;
- la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Notation
Si $\sigma(X) \neq 0$, on note parfois $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

⋆ Démonstration : Les propriétés sur l'espérance et la variance permettent de démontrer sans effort ces deux résultats...

⋆

IV Indépendance de variables aléatoires à densité

Définitions 7 — **Indépendance de VA**

D1 Soient X et Y deux variables aléatoires à densité.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall I, J \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbb{P}\big([X \in I]\big) \times \mathbb{P}\big([Y \in J]\big)$$

D2 Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité.
On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k \in I_k]\big)$$

D3 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité.
On dit que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Et le fameux :

Propriété 4 — **Lemme des coalitions**

Soient $n \in [\![3; +\infty[\![$ et $(X_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ une suite de n variables aléatoires discrètes.
Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in [\![2; n-1]\!]$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

♣ **Méthode 4** ♣ **Deux méthodes classiques...**

1. Pour la loi de $Z = \min(X, Y)$ **si X et Y sont indépendantes** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z > z]\big) &= \mathbb{P}\big([\min(X,Y) > z]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X > z] \cap [Y > z]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X > z]\big) \times \mathbb{P}\big([Y > z]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \big(1 - \mathbb{P}([X \leqslant z])\big)\big(1 - \mathbb{P}([Y \leqslant z])\big) \\
&= \big(1 - F_X(z)\big)\big(1 - F_Y(z)\big)
\end{aligned}$$

Puis on donne $\mathbb{P}\big([Z \leqslant z]\big)$...

2. Pour la loi de $Z = \max(X, Y)$ **si X et Y sont indépendantes** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z \leqslant z]\big) &= \mathbb{P}\big([\max(X,Y) \leqslant z]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X \leqslant z] \cap [Y \leqslant z]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X \leqslant z]\big) \times \mathbb{P}\big([Y \leqslant z]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= F_X(z) F_Y(z)
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on regarde ensuite si Z est à densité et, le cas échéant, on en donne une densité.

➠Réflexe !
Pour tous réels x, y, z :
$\min(x,y) > z \iff \begin{cases} x > z \\ y > z \end{cases}$
$\max(x,y) \leqslant z \iff \begin{cases} x \leqslant z \\ y \leqslant z \end{cases}$

Petite remarque
Méthodes identiques pour $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Le travail sur la somme de variables aléatoires à densité indépendantes n'est pas au programme en mathématiques appliquées, mais il arrive régulièrement que l'énoncé fournisse les résultats nécessaires à une telle étude.

Exemple 8

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité indépendantes telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_k est $F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Exprimons la fonction de répartition de M_n en fonction de F puis montrons que M_n est une variable aléatoire à densité et donnons-en une densité.

- Notons F_n la fonction de répartition de M_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big)$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Quand on demande d'exprimer une fonction de répartition d'une variable aléatoire $g(X)$ en fonction de celle de X, il est rarement utile de procéder par disjonction de cas sur les valeurs de x...

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right) && \text{$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k \leqslant x]\right) && \text{$X_1, \dots, X_n$ ont toutes la même fonction de répartition} \\
&= F(x)^n
\end{aligned}$$

- Ensuite :
  ✓ **Continuité.** Puisque F est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto F(x)^n$ également.
  Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.
  ✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Puisque F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1, la fonction F_n est également $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Par conséquent, la variable aléatoire M_n est à densité et en notant f_n une de ses densités :

⋆ pour tout $x < 0$:

$$f_n(x) = F_n'(x) = 0$$

pour tout $x \in]0; 1[$:

$$f_n(x) = F_n'(x) = n x^{n-1}$$

pour tout $x > 1$:

$$f_n(x) = F_n'(x) = 0$$

⋆ on pose $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$

Conclusion : M_n est à densité et admet pour densité la fonction $f_n : x \longmapsto \begin{cases} n x^{n-1} & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

V Comparatif VA discrètes / VA à densité

	Variables aléatoires discrètes	Variables aléatoires à densité
Donnée de la loi de probabilité	$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et on donne la *fonction de masse* : • $\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ pour tout $n \in X(\Omega)$ • $\mathbb{P}\big([X=n]\big)=0$ pour tout n en dehors de $X(\Omega)$ • On a : $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=n]\big)=1$	$X(\Omega)$ est un intervalle (ou union d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et on donne une *fonction de densité* : • f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • f_X est positive sur $\mathbb{R}$ (peut être choisie nulle en dehors de $X(\Omega)$) • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et vaut 1
Calculs de probabilités	$\mathbb{P}\big([a\leqslant X\leqslant b]\big)=\displaystyle\sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ a\leqslant n\leqslant b}} \mathbb{P}\big([X=n]\big)=F_X(b)-F_X(a)+\mathbb{P}\big([X=a]\big)$ $\mathbb{P}\big([X\leqslant b]\big)=\displaystyle\sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ n\leqslant b}} \mathbb{P}\big([X=n]\big)$ $\mathbb{P}\big([X\geqslant a]\big)=\displaystyle\sum_{\substack{n\in X(\Omega)\\ n\geqslant a}} \mathbb{P}\big([X=n]\big)$	$\mathbb{P}\big([a\leqslant X\leqslant b]\big)=\displaystyle\int_a^b f_X(t)dt=F_X(b)-F_X(a)$ $\mathbb{P}\big([X\leqslant b]\big)=\displaystyle\int_{-\infty}^b f_X(t)dt$ $\mathbb{P}\big([X\geqslant a]\big)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f_X(t)dt$ $\mathbb{P}\big([X=a]\big)=0$; $\mathbb{P}\big([X<b]\big)=\mathbb{P}\big([X\leqslant b]\big)$; $\mathbb{P}\big([X>a]\big)=\mathbb{P}\big([X\geqslant a]\big)$
Propriétés de la fonction de répartition F_X	• F_X est constante par morceaux • F_X est discontinue en chaque $n\in X(\Omega)$ • le saut de continuité en n est égal à $\mathbb{P}(X=n)$ • $\forall n\in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X\leqslant n]\big)-\mathbb{P}\big([X\leqslant n-1]\big)=\mathbb{P}(X=n)$	• F_X continue sur $\mathbb{R}$ • F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • pour tout x où F_X est $\mathscr{C}^1$: $F_X'(x)=f_X(x)$
Indépendance	Pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$: $\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=\mathbb{P}\big([X=x]\big)\times\mathbb{P}\big([Y=y]\big)$	Pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big([X\in I]\cap[Y\in J]\big)=\mathbb{P}\big([X\in I]\big)\times\mathbb{P}\big([Y\in J]\big)$
Espérance (si existence)	• X a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \big\lvert n\mathbb{P}\big([X=n]\big)\big\rvert$ est convergente • $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$	• X a une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert tf_X(t)\rvert dt$ est convergente • $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$
Théorème de transfert	• $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} \lvert g(n)\mathbb{P}(X=n)\rvert$ est convergente • $\mathbb{E}\big(g(X)\big)=\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2)=\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}\big([X=n]\big)$	Si g est continue sur $X(\Omega)$: • $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\int_{X(\Omega)} \lvert g(t)f_X(t)\rvert dt$ est convergente • $\mathbb{E}\big(g(X)\big)=\displaystyle\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2)=\displaystyle\int_{X(\Omega)} t^2f_X(t)dt$
Variance (si existence)	$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$	
Formule de Keonig-Huygens	$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$	
Propriétés de l'espérance et de la variance	Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. • Linéarité de l'espérance. Si X et Y ont une espérance, alors, $aX+bY$ aussi et : $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$. • Croissance de l'espérance. Si X et Y ont une espérance et $\mathbb{P}\big([X\leqslant Y]\big)=1$, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$. • Si X a une variance, alors $aX+b$ aussi et : $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$. • Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY a une espérance et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Si $X_1,\dots,X_n$ ont une espérance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k$ a une espérance et $\mathbb{E}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k\right)=\displaystyle\prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$. • Si X et Y ont une variance et sont indépendantes, alors $X+Y$ a une variance et $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$. Si $X_1,\dots,X_n$ ont une variance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ a une variance et $\mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.	

On admet que l'on peut étendre les propriétés sur l'espérance et la variance, vues dans le cas discret (et démontrées dans le chapitre 2) au cas des variables aléatoires à densité. Il nous manque des outils pour les démontrer dans ce cas-ci.
On admet également que l'on peut définir l'indépendance (celle dans le cas à densité), l'espérance et la variance pour des variables aléatoires ni discrètes, ni à densité. Puis on admet ensuite que les propriétés énoncées en fin de tableau sont valables dans ce cas de figure.