

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●○○○ - DENSITÉ ?

Dans chaque cas, déterminer si la fonction f est une densité de probabilité. Si c'est le cas, déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f comme densité.

$$1. f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. f : x \mapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$4. f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1; 0[\\ 1-x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$5. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in [0; e-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$6. f : x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$$

$$7. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^4} & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1; 1[\\ \frac{1}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

EXERCICE 2 - ●●○○

Dans chaque cas, déterminer (si possible) le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

$$1. f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$2. f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0; a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3. f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 3 - ●●○○ - NI DISCRÈTE NI À DENSITÉ

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition est F . Notons Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de Y .

3. En déduire que Y n'est ni discrète ni à densité.

EXERCICE 4 - ●●○○

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X .

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X . Construire sa représentation graphique.

3. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X \geq \frac{1}{2}]}\left(\left[X \leq \frac{3}{2}\right]\right)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ puis en déduire l'espérance de X .

5. Calculer de même le moment d'ordre 2 de X .

EXERCICE 5 - ●●○○

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{|t|}{(1+t^2)^2}$.

1. Étudier la parité de la fonction f .

2. Montrer que f est une densité de probabilité. Soit alors X une variable aléatoire de densité f .
3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4. Démontrer que X admet une espérance et en donner la valeur.
5. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

EXERCICE 6 - ●●○○ - LOI DE PARETO

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f . Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .
- 3.a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

- 3.b. Montrer que X admet une variance si, et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

4. Établir : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = 1$.

CONCOURS

EXERCICE 7 - ●●○○ - ECRICOME 2015 E

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Étude de la fonction f .

- 1.a. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
- 1.b. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0; +\infty[$.
- 1.c. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$.
- 1.d. Donner l'allure de la courbe représentative de f sur \mathbb{R} . Donnée : $e^{-1} \simeq 0,37$.

2. Étude d'une première variable aléatoire.

- 2.a. Montrer que f est une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f dont la fonction de répartition est notée F .
- 2.b. Sans calcul, justifier que la fonction F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

- 2.c. Montrer que pour tout réel $x : F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 2.d. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, que l'on calculera.

3. Étude d'une seconde variable aléatoire.

On considère maintenant la variable aléatoire $Y = e^X$.

- 3.a. Déterminer la fonction de répartition, notée G , de la variable aléatoire Y .
- 3.b. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
- 3.c. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

EXERCICE 8 - ●●○○ - EML 2003 E

On définit sur \mathbb{R} la fonction f par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ converge et donner sa valeur.
2. Montrer que f est une fonction de densité. Dans la suite X désigne une variable aléatoire de densité f .
3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X .

5. On pose $U = \min(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.
 - 5.a. Montrer que U est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
 - 5.b. Montrer que U admet une espérance et la calculer.
6. On pose $V = \max(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

- 6.a. Montrer que V est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
 6.b. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

EXERCICE 9 - ●●●● - ECRICOME 2019 E

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{-1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- Démontrer que la fonction f est paire.
- Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et calculer sa valeur.
- 3.a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A > 1$, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$$

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$ est convergente et donner sa valeur.

- 3.b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
- On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité et on note F_X sa fonction de répartition.
- 4.a. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 4.b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
- 4.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
- 5.a. Donner la fonction de répartition de Y , et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
- 5.b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 5.c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 10 - ●●●● - EML 2001 E

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction $f_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-t} t^n}{n!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

- 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.
- 1.b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.
- 1.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
- 1.d. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X_n .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n possède une espérance et une variance et que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{V}(X_n) = n + 1$.
3. Pour tout réel $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute entre les instants 0 et t . On suppose que Y_t suit la loi de Poisson de paramètre t .
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_n prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , et égale à l'instant d'arrivée de la n -ième voiture au péage à partir de l'instant 0.
- 3.a. Rappeler, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la loi de Y_t ainsi que son espérance et sa variance.
- 3.b. Soient $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $[Z_n \leq t] = [Y_t \geq n]$.
- 3.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de Z_n .
- 3.d. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction f_{n-1} .

EXERCICE 11 - ●●●● - ESC 2001 E

- On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$.

1.a. Calculer, pour $A \geq 1$, $\int_1^A \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis en déduire que I_1 est divergente.

1.b. Montrer, grâce à une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, l'intégrale I_n est convergente et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.

1.c. Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[2; +\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$. On donne $\sqrt{e} \simeq 1,65$.

1.d. En déduire, grâce à I_2 , que $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge. On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

2.a. Montrer que g est continue sur \mathbb{R} et qu'elle est une densité de probabilité. Dans toute la suite, X est une variable aléatoire de densité g .

2.b. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X .

2.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

2.d. On considère la fonction $G : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{2 \ln(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et qu'elle est la fonction de répartition de X .

3. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.

3.a. Justifier que Z est à valeurs dans \mathbb{N} .

3.b. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\lfloor Z = k \rfloor) = G(k+1) - G(k)$.

3.c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(\lfloor Z = k \rfloor) = -(n+1)(1 - G(n+1)) + \sum_{k=0}^n (1 - G(k+1))$$

3.d. Montrer : $(1 - G(k)) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(k)}{k^2}$.

3.e. Déduire des deux questions précédentes que la variable aléatoire Z admet une espérance.

EXERCICE 12 - ●●●○ - TYPE ORAL

1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction $f : x \mapsto \frac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. Montrer que les variables aléatoires X et $\frac{1}{X}$ ont même loi.

EXERCICE 13 - ●●●○ - TYPE ORAL

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X . On considère la variable aléatoire $Y = X + \lfloor X \rfloor$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur X pour que Y soit à densité.