

EXERCICES DU CHAPITRE 7

TOUT SUR LES INTÉGRALES

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●●

Étudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, déterminer leur valeur.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$
6. $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$
8. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1} dx$
10. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
11. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$
12. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
13. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
14. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$
15. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$
16. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
17. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$
18. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$
19. $\int_0^1 x^k \ln(x) dx$, pour $k \in \mathbb{N}$

EXERCICE 2 - ●●●

Étudier la nature de chaque intégrale ci-dessous.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + t + 1} dt$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + t} dt$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4 + \sqrt{t}} dt$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\ln(t)} dt$
5. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right) dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 3 - ●●● - Une intégrale classique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

EXERCICE 4 - ●●● - Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_{-x}^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
6. Justifier que g admet une limite en $+\infty$.
7. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq \frac{e^x - e^{-x}}{1+x^2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

EXERCICE 5 - ●●● - Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = \ln(2)$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0; 1]$.
2. **2.a.** Soit $x \in]0; 1[$. Calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$.
- 2.b.** En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$: $x^2 \ln(2) \leq f(x) \leq x \ln(2)$.

- 2.c. En déduire que f est continue sur $[0; 1]$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ puis déterminer ses variations.

EXERCICE 6 - ●●● - Fonction Gamma

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x de sorte que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on pose alors $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2. Soit $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

CONCOURS

EXERCICE 7 - ●●● - EDHEC 2004 E

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n .
- Calculer u_0 et u_1 .
- Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.
 - En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
 - En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

- Justifier, pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, la convergence de l'intégrale définissant v_n .
 - Montrer : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

EXERCICE 8 - ●●● - EDHEC 2003 E

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x , par : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .

1.b. En déduire : $I_n \sim \frac{1}{n}$.

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

- Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.

3.b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

3.c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.