



7

ANALYSE LIMITES DE SUITES

INTRODUCTION...

Convergente et *divergente* étaient des adjectifs déjà utilisés en physique dès la fin du XVI^{ème} siècle avant d'apparaître en mathématique dans l'étude des suites (et des séries) un siècle plus tard.

Historiquement, Johannes Kepler (1571–1630, allemand) semble avoir été le premier à manipuler ce vocabulaire en optique, pour parler de lentille convergente ou divergente. Les travaux de Kepler en astronomie furent considérables : soutenant la thèse de l'héliocentrisme énoncé par Nicolas Copernic (1473–1543, polonais), il parvient à l'étude précise des trajectoires de la Terre ainsi que des autres corps en orbite autour du Soleil. On lui doit, à ce sujet, les trois fameuses lois qui portent son nom. Son apport mathématique est ainsi important dans l'étude des coniques (ellipses, paraboles, hyperboles), mais également sur le calcul des aires et des volumes. En particulier, il calcule des aires de surfaces en les découpant en surfaces *infinitésimales* d'aires connues puis en sommant : c'est le début de la théorie des indivisibles...

La notion de limite fut périlleuse pour bon nombre de mathématiciens, et il a fallu attendre l'apport de Weierstrass au milieu du XIX^{ème} siècle pour clore le débat et donner la définition de limite que nous étudions et manipulons depuis.

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent des suite définies sur $\mathbb{N}$.

SUITES CONVERGENTES ET SUITES DIVERGENTES

I.1 DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 1

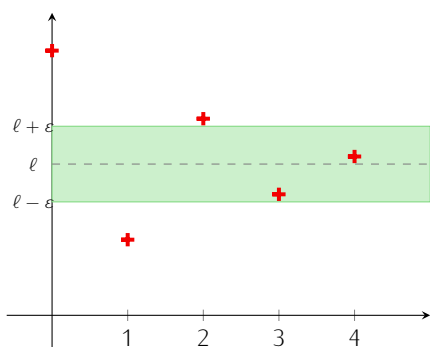
SUITE CONVERGENTE

D1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers ℓ** (ou que u_n tend vers ℓ) lorsque :

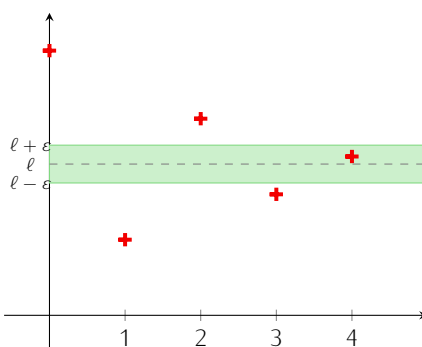
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

D2 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Autrement dit, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente lorsque :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$



Pour ce ε , on peut prendre $n_0 = 3$.



Pour ce ε , on peut prendre $n_0 = 4$, mais pas 3.

EXEMPLE 1

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - 1| \leq \varepsilon \iff \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$$

$$\iff 2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff n \ln(2) \geq -\ln(\varepsilon)$$

$$\iff n \geq \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

$\swarrow 2^n > 0$ et $\varepsilon > 0$

$\swarrow$ stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$

$\swarrow \ln(2) > 0$

Posons alors $n_0 = \left\lceil \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$. Ainsi, d'après ce qui précède, on a :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n - 1| \leq \varepsilon$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

En gros...

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ lorsque u_n peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un n suffisamment grand (ou à partir d'un certain rang).

Remarques

- De façon équivalente, (u_n) converge vers ℓ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
- On peut démontrer qu'il est équivalent d'imposer $|u_n - \ell| < \varepsilon$ plutôt que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Graphiquement

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont compris entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$. C'est ce que l'on peut observer ici avec la bande verte.

Important !

La valeur de n_0 dépend de ε . En particulier, il est assez naturel de penser que plus ε devient petit, plus il faudra aller chercher un rang n_0 grand...

Pourquoi ?

n est un entier ; d'où le fait de prendre $\lceil \dots \rceil + 1$. En effet, si, par exemple, $\frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} = 9,5$, il faudra bien prendre $n_0 = 10$.
Attention cependant :

$$\cancel{n \geq x} \iff \cancel{n \geq \lfloor x \rfloor + 1}$$

Prendre x un entier pour s'en convaincre...
La partie entière supérieure serait bien pratique ici...

Attention !

Converger signifie 'avoir une limite finie'. Ainsi, il y a deux cas de divergence : une suite peut diverger sans admettre de limite ou diverger vers $\pm\infty$.

En gros...

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque u_n peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un n suffisamment grand (ou à partir d'un certain rang).

Remarques

- Pour la divergence vers $+\infty$, il est équivalent de prendre A dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{R}^+$, ou même dans $[17; +\infty[$.
- Pour la divergence vers $-\infty$, il est équivalent de prendre A dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{R}^-$, ou même dans $]-\infty; -43]$.

DÉFINITIONS 2

SUITES DIVERGENTES

D1 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

D2 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge vers $+\infty$** lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \geq A)$$

D3 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge vers $-\infty$** lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \leq A)$$

I.2 PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Dans tous les cas :

PROPRIÉTÉ 1

UNICITÉ DE LA LIMITE

Si une suite admet une limite (réelle ou infinie), alors celle-ci est unique.

Notation

On notera alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

* DÉMONSTRATION : Traitons le cas d'une limite finie. Le cas d'une limite infinie est analogue. Voyons deux démonstrations, légèrement différentes.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers deux réels ℓ_1 et ℓ_2 . Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Quitte à échanger ℓ_1 et ℓ_2 , on peut même supposer que $\ell_1 < \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , donc il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon ; \quad \forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ainsi :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon \text{ ET } |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon \text{ ET } \ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$. Puisque $\ell_1 < \ell_2$, on a $\varepsilon > 0$. Et on obtient :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \frac{4\ell_1 - \ell_2}{3} \leq u_n \leq \frac{2\ell_1 + \ell_2}{3} \text{ ET } \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3} \leq u_n \leq \frac{4\ell_2 - \ell_1}{3}$$

Or $\ell_1 < \ell_2$, donc $\frac{2\ell_1 + \ell_2}{3} < \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3}$. D'où :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, u_n < u_n : \text{ absurde !}$$

Conclusion : $\ell_1 = \ell_2$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers deux réels ℓ_1 et ℓ_2 . Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 , donc il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon ; \quad \forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ainsi :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon \text{ ET } |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Puis, pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$,

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \\ &= |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{inégalité triangulaire} \\ \searrow n \geq n_0 \end{array}$$

On a finalement établi :

$$\forall \varepsilon > 0, |\ell_1 - \ell_2| \leq 2\varepsilon$$

Conclusion : $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, d'où $\ell_1 = \ell_2$.

Rappel...

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

Pourquoi ?

En supposant $\ell_1 \neq \ell_2$, on suppose donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel u_n est compris entre deux bandes centrées en ℓ_1 et ℓ_2 , de largeurs 2ε . Et on cherche un ε tel que ces deux bandes n'aient rien en commun !

Au passage, si on choisit ' $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ ' dans la définition quantifiée de convergence, alors prendre $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$ suffit à obtenir la contradiction !

Remarque

C'est l'exercice 8 du livre qui permet de conclure...

PROPRIÉTÉ 2

Soient $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

Remarque

Le cas général semble être hors programme ; mais les trois cas particuliers qui suivent sont très fréquents !

* DÉMONSTRATION : Traitons le cas d'une limite finie. Le cas d'une limite infinie est analogue. Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$. Démontrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe un entier n_1 , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \implies \varphi(n) \geq A)$$

En prenant $A = n_1$, il existe donc un entier n_2 que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, \varphi(n) \geq n_1$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

★

EXEMPLE 2

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

et

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$$

Par conséquent, la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1.

Or, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avait une limite, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ auraient la même limite : ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

À retenir...

Souvent, le sens direct (sa contraposée en fait) de cette propriété est utilisé, comme ici, pour établir qu'une suite n'a pas de limite.

⚠ Attention !

La réciproque est fautive : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pourtant elle ne converge pas !

Remarque

(u_{2n}) est la suite des termes de rangs pairs et (u_{2n+1}) est la suite des termes de rangs impairs.

Un dernier résultat général qui sera régulièrement utile en pratique :

PROPRIÉTÉ 3

PROPRIÉTÉ DE RECOUVREMENT

Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ si, et seulement si, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes deux pour limite ℓ .

★ **DÉMONSTRATION :** Pour changer, traitons le cas d'une limite égale à $-\infty$. Le cas d'une limite finie et celui d'une limite égale à $+\infty$ sont analogues.

Procédons par double implication.

⇒ Cas particulier de la propriété précédente.

⇐ Supposons que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes deux pour limite $-\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -\infty$, il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, u_{2n} \leq A \quad (1)$$

et

$$\forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, u_{2n+1} \leq A \quad (2)$$

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Ainsi $n_0 \geq 2n_1$ et $n_0 \geq 2n_2 + 1$. Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geq n_0$ et distinguons deux cas.

★ Si n est pair :

Il existe alors $k \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que $n = 2k$.

Puisque $n \geq n_0$, on a :

$$2k \geq 2n_1$$

et donc

$$k \geq n_1$$

Par conséquent, d'après (1) :

$$u_{2k} \leq A$$

Autrement dit :

$$u_n \leq A$$

★ Si n est impair :

Il existe alors $k \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que $n = 2k + 1$.

Puisque $n \geq n_0$, on a :

$$2k + 1 \geq 2n_2 + 1$$

et donc

$$k \geq n_2$$

Par conséquent, d'après (2) :

$$u_{2k+1} \leq A$$

Autrement dit :

$$u_n \leq A$$

Dans les deux cas, on a

$$u_n \leq A$$

On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \leq A)$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

★

EXEMPLE 3

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}$$

et

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$$

Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent donc toutes deux vers 0 (immédiat à faire à la main ; ou par opérations, qui seront vues par la suite).

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Remarque

Ce résultat se démontre aussi très simplement en utilisant le théorème d'encadrement.

II OPÉRATIONS SUR LES LIMITES ET LIMITES USUELLES

PROPRIÉTÉS 4

OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

P1 Pour la somme (les 9 cases donnent les limites de $u_n + v_n$) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Vocabulaire

"FI" signifie "Forme Indéterminée" : il s'agit de cas dans lesquels le résultat ne peut être prédit.

P2 Pour le produit (les 16 cases donnent les limites de $u_n \times v_n$) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

Les cases dans lesquelles figurent des $\pm\infty$ sont des cas où la limite peut être $+\infty$ ou $-\infty$: pour savoir, il suffit d'utiliser les règles de signe bien connues.

P3 Pour le quotient (les 9 cases donnent les limites de $\frac{u_n}{v_n}$) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0^+	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

Remarque

Les deux premiers tableaux sont symétriques, mais pas le dernier.

P4 Soient a et b des nombres réels ou $\pm\infty$. Soient f une fonction et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite pour lesquelles, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ existe.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$$

Remarque

Ce résultat est assez intuitif en fait : il faut étudier la limite de la deuxième fonction à l'endroit où arrive la première...

Rédaction

On sait qu'il ne faut jamais écrire $\frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{\infty}$ sur une copie !

Attention !

Il y a en fait deux autres FI : 1^∞ et 0^0 . Mais si vous les rencontrez, c'est que vous n'avez pas eu le bon RÉFLEXE dans l'étude d'une fonction dont la variable est en exposant...

Attention !

On démontre comme dans Exemples 2 : si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Il faut garder en tête que, globalement, la limite se comporte plutôt bien avec les opérations élémentaires et se souvenir de "l'égalité" : $\frac{1}{\infty} = 0$ qui est équivalente à $\frac{1}{0} = \infty$; tout en pensant aux règles de signes !

Les **formes indéterminées** sont les cas : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. C'est à dire que lorsque nous sommes confrontés à ces cas là, le résultat ne peut être prédit ; la limite peut être 0, $\pm\infty$, ou encore 1, 43... Tout est possible !

PROPRIÉTÉS 5

LIMITES USUELLES

P1 Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

P2 Pour tout $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ et pour tout $q \in]-1; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

P3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$

★ **DÉMONSTRATION** : On ne s'attarde pas dessus. Ces résultats peuvent se démontrer en revenant à la définition de limite et en utilisant les opérations sur les limites vues précédemment. Pour P2, on veille à manipuler $|q|$ dans le cas $q \in]-1; 1[$...

★

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer la limite d'une suite de terme général connu :

- déterminer la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de u_n
- s'il n'y a pas de forme indéterminée, conclure en utilisant les règles opératoires ci-dessus ; sinon, se référer qui suit.

EXEMPLES 4

E1 Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ . Déterminons ℓ .

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + 3$; et, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a :

- par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{1}{2}\ell + 1$;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

D'où, par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et par unicité de la limite, il vient :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1$$

Ainsi

$$\ell = 2$$

Conclusion : si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers 2.

E2 Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + 3$. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + 3$; et, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a :

- par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n^2 + 3 = 2\ell^2 + 3$;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

D'où, par passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et par unicité de la limite, il vient :

$$\ell = 2\ell^2 + 3$$

Or, l'équation $x = 2x^2 + 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, ne possède aucune solution. D'où l'absurdité !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Important !

Raisonnement intéressant qui sera assez fréquent.

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour lever une forme indéterminée :

- commencer par s'assurer que l'on a bien affaire à une forme indéterminée
- deux possibilités ensuite :
 1. factoriser par les termes qui divergent le plus vite vers l'infini
 2. utiliser la quantité conjuguée (parfois, quand il y a des racines carrées)
- **simplifier l'expression**, puis conclure en utilisant les règles opératoires sur les limites.

Remarque

n^α tend d'autant plus vite vers $+\infty$ que α est grand...

N'avons-nous pas l'impression de reproduire les mêmes choses que pour les fonctions ? ! C'est normal, jusqu'à présent, les exemples concernent majoritairement des suites définies par leur terme général ; et on a la résultat immédiat suivant :

PROPRIÉTÉ 6

LIEN FONCTION / SUITE

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

Si $f(x)$ possède une limite en $+\infty$, alors $f(n)$ également et même : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

✗ Attention !

La réciproque est fautive : il se peut que $f(n)$ possède une limite, mais pas $f(x)$: prendre par exemple $f : x \mapsto (-1)^{[2x]}$...

Remarque

Il y a un implicite ici : n ne prend que des valeurs entières. Ceci ne coule pas de source puisque la notation est identique dans les deux cas.

★ DÉMONSTRATION : *Traisons le cas d'une limite finie. Le cas d'une limite infinie est analogue.* Supposons donc qu'il existe un réel ℓ , que l'on considère ensuite, tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Démontrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, il existe un réel A , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Posons $n_0 = [A] + 1$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, on a aussi $n \geq A$ et donc :

$$|f(n) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |f(n) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Conclusion : $f(n)$ possède une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$.

★

Remarque

Une partie est démontrée dans le chapitre sur les limites de fonctions.

On peut alors retrouver sans travail supplémentaire une partie des croissances comparées suivantes :

PROPRIÉTÉS 7

CROISSANCES COMPARÉES

Pour tous réels $a, b, c > 0$:

P1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(n)^a}{n^b} = +\infty$; $\forall q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^b} = +\infty$; $\forall q \in]-1; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n n^b = 0$

P2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{\ln(n)^c} = +\infty$

P3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(n)^a}{\ln(n)^c} = +\infty$; $\forall q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{\ln(n)^c} = +\infty$; $\forall q \in]-1; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \ln(n)^c = 0$

Remarque

Une dernière :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Qui sera vue dans le chapitre sur les séries. Je conseille donc de la mettre de côté pour le moment.

★ DÉMONSTRATION : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$.

P1. • Par croissances comparées (sur les fonctions)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)^a}{x^b} = +\infty$$

D'où le résultat, d'après la propriété 6.

• Soit $q > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{q^n}{n^b} &= \frac{\exp(n \ln(q))}{n^b} \\ &= \frac{\exp(n)^{\ln(q)}}{n^b} \end{aligned}$$

Or $q > 1$, donc $\ln(q) > 0$. Ainsi, d'après le point précédent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(n)^{\ln(q)}}{n^b} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^b} = +\infty$.

• Soit $q \in]-1; 1[$.

* Si $q = 0$:

Dans ce cas, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q^n n^b = 0$$

D'où le résultat.

* Si $q \neq 0$:

$$\begin{aligned} |q^n n^b| &= |q|^n n^b \\ &= \frac{n^b}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} \end{aligned} \quad \curvearrowright q \neq 0$$

Or $|q| \in]0; 1[$, donc $\frac{1}{|q|} > 1$ et ainsi, d'après les croissances comparées précédentes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}{n^b} = +\infty$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n n^b| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n n^b = 0$.

P2. Immédiat, par croissances comparées sur les fonctions et d'après la propriété 6.

P3. Le premier point est immédiat par croissances comparées sur les fonctions et la propriété 6 ; les deux suivants se démontrent de la même façon qu'en P1.

★

On peut retenir ces croissances comparées ainsi :

Toute puissance de $\exp(n)$ (ou toute fonction puissance) l'emporte sur toute puissance de n , qui l'emporte sur toute puissance de $\ln(n)$.

✗ **Attention !**

"Pas de FI, pas de CC" !

Il est indispensable de connaître et reconnaître ces croissances comparées et de les manipuler aisément.

EXEMPLES 5

E1 Par croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n n^3 = 0$.

E2 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) - n + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $n \neq 0$ et :

$$\ln(n) - n + 2 = n \left(\frac{\ln(n)}{n} - 1 + \frac{2}{n} \right)$$

Or :

- par opérations : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$
- et par croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = +\infty$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\ln(n)}{n} - 1 + \frac{2}{n} \right) = -\infty$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) - n + 2 = -\infty$.

E3 Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - \ln(n)}{n^3 - n^2 \ln(n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $n \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{e^n - \ln(n)}{n^3 - n^2 \ln(n)} &= \frac{e^n \left(1 - \frac{\ln(n)}{e^n}\right)}{n^3 \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= \frac{e^n}{n^3} \frac{1 - \frac{\ln(n)}{e^n}}{1 - \frac{\ln(n)}{n}} \end{aligned}$$

Remarque

Inutile de préciser que l'on a affaire à une FI. On le vérifie rapidement de tête, puis on commence directement par essayer de la lever.

✍ **Rédaction**

On pense à faire apparaître les CC comme dans le cours : sous forme de quotient !

III DES THÉORÈMES BIEN PRATIQUES

III.1 LIMITES & INÉGALITÉS

PROPRIÉTÉS 8

P1 Soit $M \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq M$$

P2

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent respectivement vers des réels } \ell \text{ et } \ell' \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

P3

•

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$$

Autrement dit, une suite croissante qui converge est majorée par sa limite.

•

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$$

Autrement dit, une suite décroissante qui converge est minorée par sa limite.

✗ Attention !

L'inégalité de la conclusion demeure large même si celle de l'hypothèse est stricte ! **Les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite.**

Remarques

- On adapte ces résultats avec $\geq$.
- Ces résultats sont encore valables si les inégalités " $u_n \leq M$ " et " $u_n \leq v_n$ " ne sont valables qu'à partir d'un certain rang.

★ DÉMONSTRATION :

P1. Supposons $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \end{array} \right.$. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc $\ell > M$.
Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon)$$

Ainsi, avec $\varepsilon = \frac{\ell - M}{2}$, licite car $\ell > M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall n \in [n_0; +\infty[, \ell - \frac{\ell - M}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{\ell - M}{2}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. D'où :

$$\forall n \in [n_0; +\infty[, \frac{\ell + M}{2} \leq u_n$$

Or $\ell > M$, donc $\frac{\ell + M}{2} > M$ et ainsi :

$$\forall n \in [n_0; +\infty[, M < u_n : \text{absurde !}$$

Conclusion : $\ell \leq M$.

P2. Supposons $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent respectivement vers des réels } \ell \text{ et } \ell' \end{array} \right.$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.
Dans ce cas, on a : $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq 0 \\ (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell - \ell' \end{array} \right.$. Ainsi, d'après P1 :

$$\ell - \ell' \leq 0$$

Conclusion : $\ell \leq \ell'$.

P3. • Supposons $\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \end{array} \right.$. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par ℓ .

Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée par ℓ ; autrement dit, supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que $u_{n_0} > \ell$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, on obtient, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in [n_0; +\infty[, u_n \geq u_{n_0}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ sur cette inégalité, on obtient (d'après P1) :

$$\ell \geq u_{n_0} : \text{absurde !}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par ℓ .

• Analogue.

Pourquoi ?

Là encore, pour comprendre pourquoi un tel ε convient, on peut s'aider d'un schéma...

Remarque

Si cette inégalité n'est valable qu'à partir d'un certain rang p , il suffit de considérer $n_1 = \max(n_0, p)$ et l'inégalité suivante sera valable pour tout $n \geq n_1$.

☞ Rappel...

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par ℓ :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$

★

EXEMPLES 6

E1 Donnons deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non constantes telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1; v_n < 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n < 1$.

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \frac{1}{n+1} ; v_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

On vérifie sans mal qu'elles conviennent...

E2 Donnons deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non constantes telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite.

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \frac{1}{n+1} ; v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

On vérifie sans mal qu'elles conviennent...

Remarque

On demande des suites définies sur $\mathbb{N}$, d'où le $\frac{1}{n+1}$ au lieu du $\frac{1}{n}$.
On pourrait également remplacer $\frac{1}{n+1}$ par toute autre quantité positive tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

III.2 THÉORÈMES DE COMPARAISON

THÉORÈME 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent toutes deux vers } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

THÉORÈME D'ENCADREMENT

Remarque

Théorème encore valable si l'encadrement $u_n \leq v_n \leq w_n$ n'est valable qu'à partir d'un certain rang.

Important !

La conclusion contient deux informations : la convergence et la valeur de la limite.

★ DÉMONSTRATION : Supposons $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergent toutes deux vers } \ell \end{array} \right.$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall n \in \llbracket n_2; +\infty \llbracket, |w_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi, en posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a, pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$:

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon ; \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$; d'où, par transitivité :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

★

Remarque

Si cet encadrement n'est valable qu'à partir d'un certain rang p , il suffit de poser $n_0 = \max(n_1, n_2, p)$.

EXEMPLES 7

E1 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$. Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

✓ Pour tout entier naturel n , on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

D'où, puisque $n \geq 0$ et $n^2 + 1 > 0$:

$$\frac{-n}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

✓ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2 + 1} &= \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Et, par opérations $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 0$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

E2 Considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Que dire du comportement en l'infini de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

On a :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - 1| &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \checkmark \quad \frac{1}{3} &\in]-1; 1[, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 1| = 0$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

À retenir...

(v_n) converge vers 0 si, et seulement si, $(|v_n|)$ converge vers 0.

Et le cas d'une limite infinie :

THÉORÈME 2

THÉORÈME DE COMPARAISON

On a :

$$\left. \begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

et

$$\left. \begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Remarque

Résultats encore valables si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

★ DÉMONSTRATION :

- Supposons $\left\{ \begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{aligned} \right.$

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, u_n \geq A$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$; d'où, par transitivité :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, v_n \geq A$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- Analogue ou en appliquant le premier résultat aux suites $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = -u_n ; v'_n = -v_n$$

★

EXEMPLE 8

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2 \times (-1)^n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2 \times (-1)^n \geq n^2 - 2$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2 = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2 \times (-1)^n = +\infty$.

III.3 THÉORÈME DE LIMITE MONOTONE

Nous l'avons vu sur les fonctions ; mais puisque l'on connaît bien souvent une expression explicite d'une fonction, il est rarement utilisé... En revanche, pour les suites dont le terme général est inconnu, le théorème suivant pourra être très utile :

THÉORÈME 3

THÉORÈME DE LIMITE MONOTONE

Toute suite monotone admet une limite en $+\infty$. Plus précisément :

- T1** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- T2** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- T3** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- T4** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Important !

Les deux premiers résultats ne fournissent pas la valeur de la limite. Si elle est demandée, elle devra être obtenue d'une autre manière.

Remarque

Les deux premiers résultats sont souvent appelés **théorème de convergence monotone**, et les deux derniers **théorème de divergence monotone**.

★ DÉMONSTRATION :

P1. Démonstration hors programme.

P2. Immédiat en utilisant P1 avec $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = -u_n$.

P3. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \quad ; \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} > M$$

Montrons :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \geq A)$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée par A , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que l'on considère ensuite, tel que $u_{n_0} > A$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, on obtient, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in [n_0; +\infty[, u_n \geq u_{n_0}$$

On a ainsi établi :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \geq A)$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

P4. Immédiat en utilisant P3 avec $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = -u_n$.

★

Rappels...

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée :
 $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$:
 $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in [n_0; +\infty[, u_n \geq M$

EXEMPLE 9

Considérons $f : x \mapsto xe^{-x}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- Dressons le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$, résolvons l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, et représentons l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que les premiers termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$.

* La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} + x(-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f		e^{-1}	

* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff xe^{-x} = x \\ &\iff x(e^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ e^{-x} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ e^{-x} = 1 \end{cases} \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

★ Classique ! ★

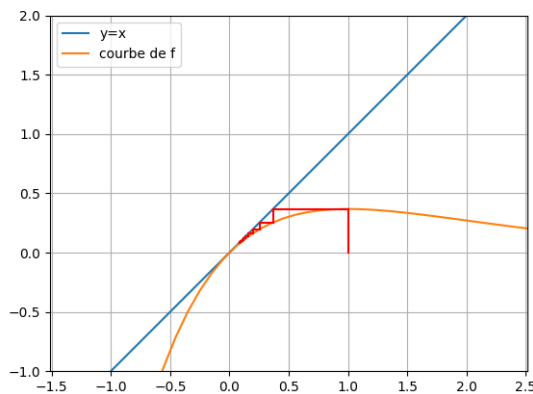
Il faut savoir refaire chacune des questions de cet exemple en très peu de temps !

✗ Attention !

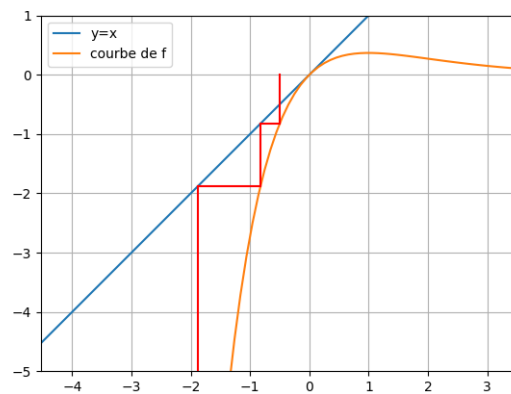
Pas de division par 0 : on ne sait pas si x vaut 0 ou non.

- * Courbe de f et représentations des premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenus en **Python** :
 Dans les deux cas, les valeurs des termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se lisent en abscisses des traits verticaux rouges.

Cas où $u_0 = 1$



Cas où $u_0 = -0,5$



• Cas $u_0 = 1$.

- * Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et bornée par 0 et 1.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

× **Initialisation.** Pour $n = 0$:

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{-1}$.

Ainsi :

$$0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$$

L'initialisation est vérifiée.

× **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ et démontrons que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

Ainsi, par croissance de f sur $[0; 1]$:

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

Autrement dit :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq e^{-1}$$

Or $e^{-1} \leq 1$, d'où :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et bornée par 0 et 1.

- * Déduisons-en que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ puis déterminons ℓ .

× On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- ✓ décroissante,
- ✓ minorée (par 0).

Donc par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ; et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0, on a $\ell \geq 0$.

× Ensuite :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$,
- ✓ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ,
- ✓ la fonction f est continue en ℓ car continue sur $\mathbb{R}$

D'où :

$$\ell = f(\ell)$$

Ainsi ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\ell = 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Rappel...

- Si :
- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 - ✓ (u_n) converge vers ℓ
 - ✓ f est continue en ℓ
- ALORS : $f(\ell) = \ell$.

Vocabulaire

- Un **point fixe** de f est un réel a qui vérifie $f(a) = a$.

• Cas $u_0 = \frac{-1}{2}$.

- * Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{-1}{2}$.

Procédons par récurrence.

× **Initialisation.** Pour $n = 0$:

$$u_0 = \frac{-1}{2} \text{ et } u_1 = \frac{-1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$e^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

donc

$$\frac{-1}{2}e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{-1}{2}$$

D'où :

$$u_1 \leq u_0 \leq \frac{-1}{2}$$

L'initialisation est vérifiée.

× **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$ et démontrons que $u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{-1}{2}$.

Par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{-1}{2}$$

Ainsi, par croissance de f sur $\mathbb{R}$:

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{-1}{2}\right)$$

Autrement dit :

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{-1}{2}e^{\frac{1}{2}}$$

Or $\frac{-1}{2}e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{-1}{2}$, d'où :

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{-1}{2}$.

* **Déduisons-en que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.**

D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, par théorème de limite monotone, elle admet une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et deux cas sont possibles :

- × cette limite est finie (si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée),
- × cette limite vaut $-\infty$ (si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée).

Raisonnons par l'absurde. Supposons que cette limite est un réel ℓ .

Ainsi :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$,
- ✓ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ,
- ✓ la fonction f est continue en ℓ car continue sur $\mathbb{R}$

Donc

$$\ell = f(\ell)$$

Ainsi, d'après ce qui précède

$$\ell = 0$$

Or, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{-1}{2}$, donc

$$\ell \leq \frac{-1}{2} : \text{absurde !}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Il y a plusieurs façons de procéder mais l'idée est toujours la même. On peut aussi démontrer, par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

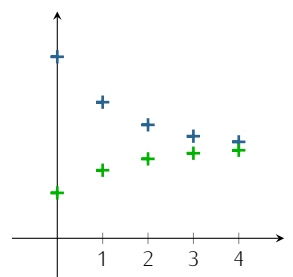
III.4 THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

DÉFINITION 3

SUITES ADJACENTES

On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :

- ✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- ✓ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (qui est équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$)



THÉORÈME 4

THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Remarque

Il arrive parfois que pour une même suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes. Dans ce cas, en combinant le théorème 4 et la propriété 2, on obtient que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

★ DÉMONSTRATION : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes telles que :

- ✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- ✓ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Or $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Mais, par hypothèse, la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par conséquent : la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$$

Or :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, elle est donc minorée par son premier terme ;
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

Par transitivité, on obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_0 ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_0$$

On a donc :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée (par v_0),
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée (par u_0).

Par théorème de convergence monotone, ces deux suites convergent respectivement vers des réels ℓ et ℓ' .

On a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad (\text{licite, car les deux limites en jeu sont finies})$$

$$= \ell' - \ell$$

Mais, par hypothèse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. D'où :

$$\ell = \ell'$$

Conclusion : les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

★

EXEMPLE 10

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur $\mathbb{N}^*$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Démontrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers le même réel.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Remarque

On peut s'y prendre un peu différemment, mais l'avantage ici, est de ne faire que du calcul (assez élémentaire en plus) : la rédaction est plus fluide.

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Conclusion : les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, ainsi elles convergent vers le même réel.

 **Pour info...**

Et leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$...