

## EXERCICES DU CHAPITRE 7

### LIMITES DE SUITES

#### EXERCICE 1 - ●●○ - Calculs de limites

Déterminer la limite de chaque suite dont on donne le terme général :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 3}{e^{-n} + 1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 - n + 3}{n + 7}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n + 1}{\sqrt{n} + 3}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n}{2^n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5^n - e^n}{2^n + 3^n}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n^2 + 2n + 1) - \ln(n^2)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 - \ln(n)}{5n^3 + 2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{3n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n + 1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{3n^2 + 5n + 1} - \sqrt{3n^2 + 2n + 1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

#### EXERCICE 2 - ●●○ - Vrai ou faux ?

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels.

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, alors elle est minorée.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et converge vers  $\ell$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $\ell$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{1}{n^2 + 1}$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et positive, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si, et seulement si, la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 2 si, et seulement si, la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 2.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors elle converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, alors elle est bornée.
- Si la suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite, alors les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  également.
- Si les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .
- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ , alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

#### EXERCICE 3 - ●●○ - Suites définies par une somme

- Considérons la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}; +\infty[}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}; +\infty[, S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$$

1.a. Calculer  $S_2$  et  $S_3$ .

1.b. Étudier les variations de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}; +\infty[}$ .

1.c. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{Z}; +\infty[$  :

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}$$

1.d. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{Z}; +\infty[$ , une expression simplifiée de  $S_n$  puis la limite de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}; +\infty[}$ .

- Considérons la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2.a. Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ .

2.b. Conclure que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge vers  $+\infty$ .

#### EXERCICE 4 - ●●○ - Qui va le plus vite ?

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n}{n!}$$

1. Calculer  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?
2. Démontrer que la suite est décroissante à partir du rang 2.
3. Montrer que pour tout  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket : u_{n+1} \leq \frac{e}{3} u_n$ .
4. En déduire que pour tout  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket : u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$ .
5. Qui tend plus vite vers  $+\infty$  entre  $n!$  et  $e^n$  ?

#### EXERCICE 5 - ●●○ - Un grand classique sur les suites adjacentes

Considérons la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Démontrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

#### EXERCICE 6 - ●●○ - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction  $f : x \mapsto x - \ln(x^2 + 1) + 1$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un entier naturel  $n$  et renvoie la valeur de  $u_n$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$ .
3. Justifier que  $f$  admet deux points fixes opposés et les déterminer. *On notera  $\alpha$  le point fixe positif.*
4. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et bornée par 0 et  $\alpha$ .
5. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer sa limite.
6. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n (1 - \ln(u_k^2 + 1))$ . Établir la convergence de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer sa limite.

#### EXERCICE 7 - ●●○ - Suite récurrente d'ordre 1 (bis)

Considérons la fonction  $f : x \mapsto x^2 e^{-x+1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ , ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

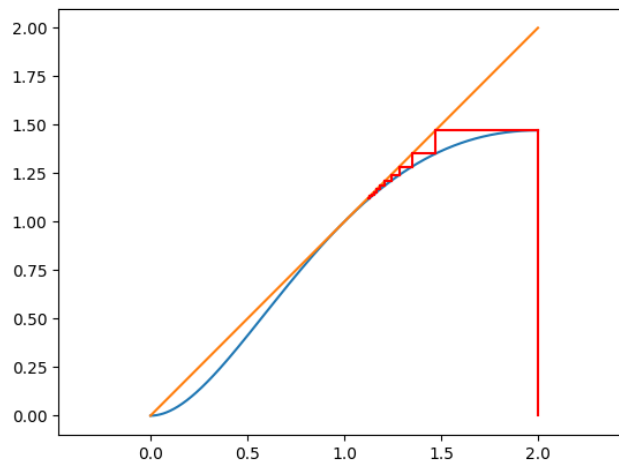
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que son exécution affiche le graphique qui suit sur lequel apparaissent :
  - la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2]$ ,
  - la droite d'équation  $y = x$ ,
  - la représentation graphique des premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

##### Vocabulaire

La droite d'équation  $y = x$  dans un repère orthonormé du plan s'appelle la **première bissectrice**.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     return ...
6
7 X=np.linspace(...,...,1000)
8 Y=...
9 plt.plot(X,Y)
10 plt.plot(...,...) #premiere bissectrice
11 plt.axis('equal')
12
13 u=2
14 plt.plot([u,u],[0,f(u)],'r')
15 plt.plot([u,f(u)],[f(u),f(u)],'r')
16 for k in range(1,11):
17     u=...
18     plt.plot(...,...,'r')
19     plt.plot(...,...,'r')
20 plt.show()
```



2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que pour tout  $x \in ]1; 2]$ ,  $f(x) < x$ .
4. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ .
5. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$  appartenant à  $[1; 2]$ .
6. Déterminer la valeur de  $\ell$ .
7. Écrire une fonction **Python** qui renvoie le plus petit  $n$  à partir duquel  $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$ .

### EXERCICE 8 - ●●● - Suite récurrente d'ordre 1 divergente

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2}{x} - x^2$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \leq -1$ .
3. Déterminer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le signe de  $x^3 + x^2 - 2$ .
4. En déduire les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas minorée.
6. Conclure sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $+\infty$ .

### EXERCICE 9 - ●●● - Suite récurrente d'ordre 1 divergente (bis)

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie, puis démontrer qu'elle diverge vers  $+\infty$ .

### EXERCICE 10 - ●●● - Nombre d'or et suite récurrente

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ . Le **nombre d'or** est l'unique rapport  $\frac{a}{b}$  tel que  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ .

1. Déterminer la valeur du nombre d'or, noté  $\varphi$ .
2. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ .
  - 2.a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  existe et  $1 \leq u_n \leq \varphi$ .
  - 2.b. Étudier les variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  puis démontrer qu'elle converge vers  $\varphi$ .
  - 2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$

puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- 2.d. Retrouver alors la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  puis déterminer un rang à partir duquel  $u_n$  est proche de  $\varphi$  à  $10^{-10}$  près.
- 2.e. L'exécution du programme suivant affiche 21. Interpréter ce résultat.

```

1 import numpy as np
2
3 phi=(1+np.sqrt(5))/2
4 n=1
5 u=1
6 while abs(u-phi)>10**(-10):
7     n=n+1
8     u=np.sqrt(1+u)
9 print(n)

```

### EXERCICE 11 - ●●● - Suite récurrente d'ordre 1 (fonction décroissante)

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ , définie sur  $\mathbb{R}^+$ , ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et bornée par 0 et 1.
2. Démontrer que la fonction  $f$  possède un unique point fixe, noté  $\alpha$ , et le déterminer.
3. Représenter l'allure de la courbe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  ainsi que les premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Démontrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ .
5. Justifier que la fonction  $f \circ f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
6. Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ . Dédurre des questions précédentes que les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et déterminer leur limite.
7. Conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .