7

Algèbre linéaire

Représentation matricielle des applications linéaires

Introduction...

Ce chapitre est la suite directe de celui sur les applications linéaires.
Pour résumer ce que nous verrons : en dimension finie, une application linéaire n'est autre que la donnée d'une base et d'une matrice !

Les connaissances sur les matrices viendront donc naturellement nous aider dans l'étude des applications linéaires.

Pour bien démarrer...

1. Soient E et F deux espaces vectoriels ainsi que $f : E \to F$ une application.

   - f est une application linéaire lorsque :

   $$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a\vec{u} + b\vec{v}) af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$$

   - Si f est une application linéaire, alors :

   $$f(\vec{0_E}) = \vec{0_F} \quad ; \quad \forall \vec{u} \in E,\ f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$$

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f : E \to F$ une application linéaire.

   - Tout sur le noyau de f :
     * Définition : $\ker(f) = \{\vec{u} \in E \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0_E}\}$.
     * Propriétés :
       - × $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E ;
       - × f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{\vec{0_E}\}$.
   - Tout sur l'image de f :
     * Définition : $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{v} \in F \ / \ \exists \vec{u} \in E \ / \ \vec{v} = f(\vec{u})\} = \{f(\vec{u}),\ \vec{u} \in E\}$.
     * Propriétés :
       - × $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F sa dimension est appelée rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$;
       - × Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E, alors :

       $$F = \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$$

       - × f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$
         si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$

3. Théorème du rang. Caractérisation aux isomorphismes.
   Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f : E \to F$ une application linéaire.

   - Théorème du rang :

   $$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$$

   - Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors :

   $$\begin{tikzcd} f \text{ injective} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f \text{ surjective} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

   Autrement dit, si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

   $$\begin{tikzcd} \ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathrm{rg}(f) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

4. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E.

   - Pour tout $\vec{u} \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$ est la matrice colonne des cordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   - Isomorphisme de représentation :
     L'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \vec{u} & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
     En particulier :

   $$\forall \vec{u}, v \in E,\ \big(\vec{u} = \vec{v} \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v})\big)$$

I Représentation matricielle d'une application linéaire

On commence déjà par rappeler un premier résultat : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} g(\lambda X_1 + \mu X_2 &= A(\lambda X_1 + \mu X_2) \\ &= \lambda AX_1 + \mu AX_2 \\ &= \lambda g(X_1) + \mu g(X_2) \end{aligned}$$

✘ Attention !
Attention aux tailles des matrices... Puisque $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, X a p lignes ; donc la matrice A doit avoir p colonnes pour que le produit AX soit bien défini. Et on a bien $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, considérons E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$. Munissons E d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ et F d'une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$. Soient également $g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\vec{u} \in E$. Manipulons un peu l'expression de $g(\vec{u})$...

Remarque
En pratique, on travaille le plus souvent dans les bases canoniques de E et F, même s'il est parfois utile de changer de base !

- Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$ est une base de E, il existe des uniques réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j$.
  Par conséquent :

$$\begin{aligned} g(\vec{u}) &= g\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) \quad \text{par linéarité de } g \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j g(\vec{e}_j) \end{aligned}$$

- De plus, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, puisque $g(\vec{e}_j) \in F$ et que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de F, il existe des uniques réels $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$, que nous considérons ensuite tels que $g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i$.

Remarque
• $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$.
• $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$ sont les coordonnées de $\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ (il est donc normal que leur indexation dépende de j).

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} g(\vec{u}) &= \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{i,j} \vec{f}_i \quad \text{permutation des deux sommes} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j} \vec{f}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) \vec{f}_i \end{aligned}$$

Par conséquent, les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $g(\vec{u})$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ sont définies par :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \; y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \qquad (\star)$$

Et cela nous rappelle un produit matriciel ! Plus précisément, posons :

✎ Notation
Si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $\mathscr{B}$, on note parfois $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$ la matrice colonne de ses coordonnées.

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$;
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $g(\vec{u})$ (que l'on peut noter $\vec{v}$) dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$;
- $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice dont la colonne j contient les coordonnées de $g(\vec{e}_j)$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$.

★Subtil...★
Puisque, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, les coordonnées de $g(\vec{e}_j)$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ sont uniques, la matrice A ainsi définie est bien unique.

On obtient ainsi :

$$(\star) \iff Y = AX$$

> Après avoir choisi une base de E et une base de F, la relation $\vec{v} = g(\vec{u})$ se traduit matriciellement par : $Y = AX$ (avec les notations définies ci-dessus). Autrement dit, toute application linéaire $g \in \mathscr{L}(E, F)$ peut être codée par une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et son action sur un vecteur $\vec{u} \in E$ se traduit simplement par le produit matriciel AX.

la forme $X \longmapsto AX$! Là encore, c'est puissant et décevant à la fois...

Afin d'énoncer clairement ce que nous venons d'établir, commençons par une définition :

DÉFINITION 1 — MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soit également $g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $\mathscr{B}_E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ est une base de E et $\mathscr{B}_F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ une base de F.
On appelle **matrice représentative de g dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$, dont **la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur $g(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.**

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(\vec{e}_1) & \dots & g(\vec{e}_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \\ \vec{f}_n \end{array} \end{array}$$

Remarque
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, la matrice est carrée.
- Si $E = F$, φ est un endomorphisme ; et en prenant la même base en départ et en arrivée, on considère la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g)$ que l'on notera simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

Résumons ce que nous venons de faire dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
2. Avec les notations de la définition précédente, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in F$, si :
   - ✓ X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_E$,
   - ✓ Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}_F$,
   - ✓ $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$,

   alors :
   $$\vec{v} = g(\vec{u}) \iff Y = AX$$
   Autrement dit :
   $$\vec{v} = g(\vec{u}) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\vec{v}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\vec{u})$$

♣ Méthode !
Cela fournit donc une autre méthode pour montrer rapidement qu'une application (de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est linéaire...

EXEMPLES 1

E1 Considérons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix}$.

- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
  Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est sa matrice canoniquement associée.
- Notons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Démontrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis donnons la matrice de f dans cette base.
  - ⁎ Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

    Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b+c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+2c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+2c=0 \\ 6c=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

    Par conséquent : $a = b = c = 0$, et donc la famille $\mathscr{B}$ est libre.
    Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

✓ libre d'après ce qui précède,
✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Conclusion : la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

* Donnons maintenant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On a :

× $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$;

× $f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$;

× $f\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

E2 Considérons l'application φ qui à toute fonction $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $\varphi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = P(x) + (1-x)P'(x)$$

• Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

* Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$. Montrons que $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$; autrement dit, montrons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x) + (1-x)(\lambda P + \mu Q)'(x)\\ &= \lambda P(x) + \mu Q(x) + (1-x)P'(x) + (1-x)Q'(x) \quad \text{linéarité de la dérivation et de l'évaluation en } x\\ &= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$, donc φ est une application linéaire.

* Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(P)(x) &= cx^2 + bx + a + (1-x)(2cx + b)\\ &= cx^2 + bx + a + 2cx + b - 2cx^2 - bx\\ &= -cx^2 + 2cx + b + a\end{aligned}$$

Conclusion : $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

♣ Méthode !
Pour montrer $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$, deux méthodes possibles :
• écrire $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$ puis calculer $\varphi(P)$...
• **justifier que $\varphi(P)$ est polynomiale** puis travailler sur les degrés pour établir que $\deg\left(\varphi(P)\right) \leqslant 2$.
Même si la première méthode est plus calculatoire, elle a l'avantage de toujours aboutir, ce qui n'est pas le cas de la seconde. La première fournit aussi, sans calcul supplémentaire, la matrice canoniquement associée à g...

• Déterminons la matrice φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, notée A.
Notons (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que l'on a $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$.
Ainsi :

* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_0)(x) = 1 + (1-x) \times 0 = 1$, d'où :

$$\varphi(P_0) = P_0$$

* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_1)(x) = x + (1-x) \times 1 = 1$, d'où :

$$\varphi(P_1) = P_0$$

* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_2)(x) = x^2 + (1-x) \times 2x = -x^2 + 2x$, d'où :

$$\varphi(P_2) = 2P_1 - P_2$$

Conclusion : $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

- Déterminons maintenant, à l'aide des matrices, une base du noyau de φ.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$.
Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Par conséquent :

✘ Attention ! Attention à l'ordre des vecteurs dans une base !

$$\begin{aligned}
P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = 0_{3,1} \\
&\iff A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2c = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -b \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = -b + bx \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = b\big(P_1(x) - P_0(x)\big) \\
&\iff P = b(P_1 - P_0)
\end{aligned}$$

✍ Rédaction La question porte sur P, on termine donc avec $P = \ldots$.

Par conséquent : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(P_1 - P_0)$.
La famille $(P_1 - P_0)$ est ainsi :
  - ✓ génératrice de $\ker(\varphi)$ par définition,
  - ✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $(P_1 - P_0)$ est une base de $\ker(\varphi)$.

E3 Considérons $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.
Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminons sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- ∗ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) \\
&= \lambda AM + \mu AN \\
&= \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N)
\end{aligned}$$

  Conclusion : φ est une application linéaire.
  - ∗ Ensuite, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Notons $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a :
  - ∗ $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,1}$
  - ∗ $\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,2}$
  - ∗ $\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1}$
  - ∗ $\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}$

Conclusion : la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous venons d'établir qu'après avoir fixé des bases de E et F, chaque application linéaire $g \in \mathscr{L}(E, F)$ peut être représentée matriciellement par une unique matrice (c'est d'ailleurs ce qui permet de définir l'application Φ dans le théorème suivant). En fait, la réciproque est également vraie : une fois des bases de E et F choisies, chaque matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$) définit une unique application linéaire de $\mathscr{L}(E, F)$... On a même :

Théorème 2 — Isomorphisme de représentation

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Munissons E d'une base notée $\mathscr{B}_E$ et F d'une base notée $\mathscr{B}_F$.
L'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.
Par conséquent : $\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = np$.

Important !
Deux informations dans ce théorème :
• le caractère bijectif : une fois des bases fixées, il y a correspondance unique entre une application linéaire et une matrice dans ces bases.
• le caractère linéaire : la matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires est la combinaison linéaire des matrices de chacune.

★ Démonstration :

- Écrivons $\mathscr{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$.
  - ∗ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $g, h \in \mathscr{L}(E,F)$.
    Montrons $\Phi(\lambda g + \mu g) = \lambda \Phi(g) + \mu \Phi(h)$; autrement dit, montrons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$.
    Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$. Notons :
    × $a_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$
    × $b_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$
    × $c_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h)$
    Par définition, on a :
    $$g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i \quad ; \quad h(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \vec{f}_i \; ; \; (\lambda g + \mu h)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\, \vec{f}_i$$
    Mais, on a également :
    $$\begin{aligned} (\lambda g + \mu h)(\vec{e}_j) &= \lambda g(\vec{e}_j) + \mu h(\vec{e}_j) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \vec{f}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) \vec{f}_i \end{aligned}$$
    par linéarité de la somme
    Or, la famille $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de F, et par unicité de l'écriture d'un vecteur selon une base, on obtient :
    $$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$
    On a ainsi démontré :
    $$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], \; c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$
    Par conséquent :
    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$$
    Conclusion : l'application Φ est linéaire.
  - ∗ Puisque Φ est linéaire, montrons qu'elle est injective en déterminant son noyau.
    Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :
    $$\begin{aligned} g \in \ker(\Phi) &\iff \Phi(g) = 0_{n,p} \\ &\iff \forall j \in [\![1;p]\!], \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\left(g(\vec{e}_j)\right) = 0_{n,1} \\ &\iff \forall j \in [\![1;p]\!], \; g(\vec{e}_j) = \overrightarrow{0_F} \end{aligned}$$
    une matrice est nulle ssi chacune de ses colonnes est nulle
    Or, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E et une application linéaire sur E est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E, on en déduit que φ est l'application linéaire nulle.
    Ainsi :
    $$g \in \ker(\Phi) \iff \varphi = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$$
    Conclusion : $\ker(\Phi) = \{0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$, et Φ est donc injective.
  - ∗ Montrons que Φ est surjective, autrement dit, montrons : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \; \exists g \in \mathscr{L}(E,F) \;/\; \Phi(g) = A$.
    Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Puisqu'une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E et que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, considérons l'application linéaire φ définie par : $\forall j \in [\![1;p]\!], \; g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i$.
    De cette façon, on a :
    $$g \in \mathscr{L}(E,F) \;\; ; \;\; \Phi(g) = A$$
    Conclusion : Φ est surjective.

Conclusion : Φ est un isomorphisme.

- Puisque Φ est un isomorphisme, on a :

$$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)$$

Conclusion : $\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = np$.

À retenir...
Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ aussi et
$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim(E) \times \dim(F)$

THÉORÈME 3

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Notons $q = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $n = \dim(G)$ et considérons $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, G.
On a déjà vu que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$; mais on a aussi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Autrement dit, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in G$, si :
- ✓ X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}_E$
- ✓ Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}_G$
- ✓ A est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ ($A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$)
- ✓ B est la matrice de g dans les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ ($B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

alors :

$$\vec{v} = (g \circ f)(\vec{u}) \iff Y = BAX$$

En gros...
La composition d'applications linéaires se traduit par le produit matriciel.

Important !
En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors A^2 est la matrice de $f \circ f$ dans $\mathscr{B}_E$; A^3 la matrice de $f \circ f \circ f$ dans $\mathscr{B}_E$...

$\star$ DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer deux fois le second point du théorème 1 : une fois pour f, une fois pour g. $\star$

Et voici une conséquence immédiate de ce théorème, très utile en pratique :

PROPRIÉTÉ 1 — **ISOMORPHISMES ET MATRICES**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Munissons E d'une base $\mathscr{B}_E$ et F d'une base $\mathscr{B}_F$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$f \text{ est bijective si, et seulement si, } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}$$

Et, si f est bijective, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}$.

☞ Rappel...
Pour le cas général, voir 1A – Chapitre 11 – Propriétés 2 – P2 ; et on sait que si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

$\star$ DÉMONSTRATION : Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(f \text{ est bijective}\right) &\iff \exists g \in \mathscr{L}(F,E) \ / \ g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ ET } f \circ g = \mathrm{id}_F \\
&\iff \exists g \in \mathscr{L}(F,E) \ / \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(g \circ f) = I_n \text{ ET } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f \circ g) = I_n \\
&\iff \exists g \in \mathscr{L}(F,E) \ / \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = I_n \text{ ET } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) = I_n \\
&\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ B \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times B = I_n \\
&\iff \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}\right)
\end{aligned}$$

isomorphisme de représentation

théorème 3

Et, le cas échéant, on a avec ce qui précède : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}$. $\star$

EXEMPLE 2

Exemples 1 – E2 : nous avions obtenu la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice possède deux colonnes identiques, elle n'est donc pas inversible.

Conclusion : l'endomorphisme φ, défini dans Exemples 1 – E2, n'est pas bijectif.

Remarque
Nous avions déterminé le noyau, qui nous avait déjà permis de conclure. Nous venons d'en voir une autre méthode.

II Noyau, image et rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. D'après ce qui a été fait précédemment, et en notant $f_A : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$, on a :

$$\ker(f_A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$$

puis, si $(E_1, E_2, ..., E_p)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}\left(f_A(E_1), f_A(E_2), ..., f_A(E_p)\right)$.
Mais, en notant, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, C_j la j-ième colonne de A, on a par produit matriciel : $f_A(E_j) = C_j$. D'où :

$$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, ..., C_p\right)$$

Vocabulaire
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$ est l'application linéaire **canoniquement associée à** A.

et enfin

$$\text{rg}(f_A) = \dim\left(\text{Im}(f_A)\right) = \dim\left(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)\right)$$

Ceci justifie les définitions suivantes :

DÉFINITIONS 2 — **NOYAU, IMAGE, RANG D'UNE MATRICE**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

D1 Le **noyau** de A, noté $\ker(A)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$$

D2 L'**image** de A, notée $\text{Im}(A)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(C_1, C_2, \dots, C_p\right)$$

où, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, C_j représente la j-ième colonne de A.

D3 Le **rang** de A, noté $\text{rg}(A)$, est la dimension de $\text{Im}(A)$.

Remarque
Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.

Version matricielle du théorème du rang :

THÉORÈME 4 — **THÉORÈME DU RANG (VERSION MATRICIELLE)**

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :

$$p = \dim\left(\ker(A)\right) + \text{rg}(A)$$

⋆ DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer le théorème du rang (version application linéaire) à l'application linéaire $f_A : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$... ⋆

Et de la même façon :

PROPRIÉTÉ 2 — **CARACTÉRISATION DE L'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE CARRÉE**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{tikzcd}
\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{rg}(A) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& A \text{ inversible} &
\end{tikzcd}$$

☞ Pour info...
On peut démontrer ce résultat sans utiliser les applications linéaires, et cela a été fait dans le chapitre 1 !

⋆ DÉMONSTRATION : Immédiat, d'après la propriété 1 et sa version sur les applications linéaires. ⋆

EXEMPLES 3

E1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 0$. Que dire de A ?

E2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

E3 La matrice $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

E4 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Puisque A contient deux colonnes non colinéaires, on a déjà $\text{rg}(A) \geqslant 2$. Ensuite, remarquons que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$.

  Par conséquent, $\dim\left(\ker(A)\right) \geqslant 1$.
- Or, d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim\left(\ker(A)\right) + \text{rg}(A)$$

Conclusion : $\text{rg}(A) = 2$; $\dim\left(\ker(A)\right) = 1$.

E5 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elle est donc de rang 3. Par conséquent, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3. On en déduit :

- A est inversible ;
- $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

E6 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

E7 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III Changement de bases et matrices semblables

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie n et f est un endomorphisme de E.

III.1 Matrices de passage et formules de changements de base

Définition 3 — Matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', ..., \vec{e}_n\,')$ deux bases de E.
La **matrice de passage de** $\mathscr{B}$ **vers** $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de $\vec{e}_j\,'$ dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e}_1\,' & \dots & \vec{e}_n\,' \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array}$$

Remarque
En fait :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$$

Exemple 4

Notons $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto 1 + x$ et $P_2 : x \longmapsto 1 + x + x^2$. Justifions que la famille $\mathscr{B}' = \big(P_0, P_1, P_2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ puis donnons la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathscr{B}'$.
La famille $\big(P_0, P_1, P_2\big)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est :

- ✓ libre car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big)$.

Conclusion : la famille (P_0, P_1, P_2) est une famille base de $\mathbb{R}_2[x]$ et $P_{bc,\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 3

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

⋆ Démonstration : On a remarqué que : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$.
Or, id est bijectif, donc d'après la propriété 1, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ est inversible et

$$\begin{aligned} P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})^{-1} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}^{-1}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) && \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \end{aligned}$$

⋆

Et on a même :

Propriété 4

Une matrice carrée est une matrice de passage si, et seulement si, elle est inversible.

Démonstration : Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Une matrice de passage est inversible, d'après la propriété précédente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A est inversible.
D'après la propriété 2, on a alors :

$$\text{rg}(A) = n$$

Autrement dit, la famille $(C_1, ..., C_n)$ (où, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, C_i désigne la i-ème colonne de A) est de rang n.
Par conséquent, cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Conclusion : la matrice A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers la base $(C_1, ...C_n)$.

Propriétés 5 — **Formules de changement de base**

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

P1 Pour tout $x \in E$:

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

P2 Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P^{-1}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\end{aligned}$$

♥ Astuce du chef ♥
Pour mieux retenir ces formules, on ne peut que regarder la concordance des bases consécutivement écrites... un peu comme la relation de Chasles.

Démonstration :

P1. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\text{id}(x)\big) \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{id}) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) && \text{théorème 1} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\end{aligned}$$

P2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\text{id} \circ f \circ \text{id}\big) \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{id}) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{id}) && \text{théorème 3} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} && \text{propriété 3}\end{aligned}$$

Exemple 5

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On admet que la famille $\mathscr{B}' = \big((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donnons la matrice de f dans $\mathscr{B}'$, notée T, puis écrivons une égalité reliant A et T.

- Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathscr{B}'$. On a ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :
  - $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $f(1,0,1) = (2,0,2) = 2(1,0,1)$;
  - $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $f(-1,1,0) = (-1,1,0)$;

* $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, donc $f(1,1,1)=(0,2,1)=(-1,1,0)+(1,1,1)$.

D'où :

$$\begin{aligned}T&=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\\&=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Par formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f)=P_{bc,\mathscr{B}'}\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\times P_{\mathscr{B}',bc}$$

Enfin, P est inversible comme matrice de passage et :

$$A=PTP^{-1}$$

Conclusion : $T=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=PTP^{-1}$.

Remarque
Bien évidemment, cette formule de changement de base peut également servir pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans une certaine base ; mais pour cela, il faut déjà avoir inversé la matrice de passage.

III.2 Matrices semblables

Pour conclure cette partie, une dernière définition suivie d'une propriété assez théorique, mais utile.

Définition 4 — Matrices semblables

Soient $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que les matrices M et N sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M=PNP^{-1}$$

Remarque
Cette définition est bien symétrique (on dit que M et N sont semblables, pas seulement que M est semblable à N...) puisque :

$M{=}PNP^{-1}\Longleftrightarrow N{=}P^{-1}M\left(P^{-1}\right)^{-1}$

Propriété 6 — Caractérisation des matrices semblables

Deux matrices (différentes) sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (différentes).

Démonstration : Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat d'après Propriétés 5 - P2 et par définition de matrices semblables.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que M et N sont semblables. Il existe alors une matrice $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que nous considérons ensuite, telle que : $M=PNP^{-1}$.
Montrons qu'il existe $f\in\mathscr{L}(E)$ telles que M et N représentent toutes deux f.
Notons $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E. Par isomorphisme de représentation, il existe un unique endomorphisme de E noté f, que nous considérons ensuite, tel que $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Pour tout $j\in[\![1;n]\!]$, on pose : $\vec{e}\,'_j=\sum_{i=1}^{n}p_{i,j}\vec{e}_i$ (où $p_{i,j}$ désigne le coefficient (i,j) de la matrice P). Ainsi, en notant $\mathscr{B}'=(\vec{e}\,'_1,\ldots,\vec{e}\,'_n)$, on a alors : $P=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
L'égalité $M=PNP^{-1}$ s'écrit donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}NP_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}N&=P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}MP^{-1}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\\&=P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}MP_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\\&=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\end{aligned}$$

formule de changement de base

Par conséquent, M et N représentent toutes deux le même endomorphisme f.

IV Travail sur le rang...

Commençons par ces premiers résultats, puis voyons-en trois conséquences :

Propriétés 7 — **Rang et composition d'AL**

P1 Soient E, F, G trois espaces vectoriels ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $h \in \mathscr{L}(G,E)$.
- Si g est bijective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.
- Si h est bijective, alors $\mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(f)$.

Autrement dit : le rang est invariant par composition à droite et/ou à gauche par un isomorphisme.

P2 D'un point de vue matriciel : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- Si B est inversible, alors $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(A)$.
- Si C est inversible, alors $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$.

Autrement dit : le rang est invariant par multiplication à droite et/ou à gauche par une matrice inversible.

Démonstration : En exercice.

Propriété 8 — **Rang et transposition**

Pour toute matrice A, on a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

♥ Astuce du chef ♥
On peut donc trouver le rang d'une matrice en raisonnant sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes...

Démonstration : En exercice.

Propriétés 9 — **Invariance du rang par opérations élémentaires**

P1 On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes et/ou sur ses colonnes.
En particulier : l'inversibilité ou la non inversibilité d'une matrice est conservée par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

P2 Le rang d'une réduite de Gauss est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice.

♣ Méthode !
On peut donc déterminer le rang d'une matrice en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener au rang d'une matrice triangulaire.

Démonstration :

P1. D'après les propriétés précédentes, le rang est inchangé par multiplication par une matrice inversible. Pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer que les opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes peuvent se traduire matricielle ment par une multiplication (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.
Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Échange de lignes / colonnes.
  - ✱ Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$. Échanger les lignes L_i et L_j de M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
    - × pour tous $k \notin \{i,j\}$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées) ;
    - × $a_{j,i} = 1$ et $a_{i,j} = 1$ (la ligne L_i passe en ligne j et la ligne L_j passe en ligne i) ;
    - × $a_{i,i} = 0$ et $a_{j,j} = 0$;
    - × tous les autres coefficients étant nuls.

    Cette matrice est inversible puisqu'en effectuant deux fois de suite cet échange de lignes, on retrouve la matrice initiale... Autrement dit :
    $$A^2M = M$$
    En prenant le cas particulier $n = p$ et $M = I_n$, on obtient $A^2 = I_n$, donc A est inversible d'inverse A^{-1}.
  - ✱ Soient $i, j \in [\![1;p]\!]$. Échanger les colonnes C_i et C_j de M équivaut à multiplier M à droite par cette même matrice A...
- Combinaison linéaire de lignes / colonnes.
  - ✱ Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$. Remplacer la ligne L_i par la ligne $aL_i + bL_j$ d'une matrice M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A définie par :
    - × pour tous $k \neq i$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées) ;
    - × $a_{i,i} = a$ (la ligne L_i est multipliée par a) et $a_{i,j} = b$ (la ligne L_j est multipliée par b et sera ajoutée à la ligne L_i) ;
    - × tous les autres coefficients étant nuls.

Remarque
Ce qu'il faut retenir de cette démonstration, c'est essentiellement le recul que demande l'interprétation des opérations élémentaires en multiplications matricielles. Réussir cette étape prouve une bonne compréhension du produit matriciel !

Cette matrice est triangulaire (supérieure si $j > i$, inférieure si $j < i$) avec des 1 partout sur la diagonale sauf le coefficient (i, i), égal à a, qui est non nul. Ainsi, A est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls ; elle est donc inversible.

* Soient $i, j \in [\![1; p]\!]$. Remplacer la colonne C_i par la colonne $aC_i + bC_j$ équivaut à multiplier M à droite par cette même matrice A...

Conclusion : les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes se traduisent en multiplication matricielle par une matrice inversible ; ainsi, d'après les propriétés précédentes, les opérations élémentaires sur les lignes et colonne laissent invariant le rang.

P2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une réduite de Gauss d'une matrice. Supposons que A possède m lignes nulles (avec $m \in [\![0; n]\!]$).

- Si $m = n$: alors $A = 0_{n,n}$ et donc $\text{rg}(A) = 0$.
- Si $m \neq n$:
  D'après la propriété précédente :
  $$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$$
  Mais, puisque A est une réduite de Gauss, elle est triangulaire supérieure, donc ${}^tA$ est triangulaire inférieure comportant m colonnes nulles. Par conséquent, $\text{Im}({}^tA)$ est engendrée par les $n - m$ autres colonnes non nulles de ${}^tA$ (et il y en a bien au moins une, car $m \neq n$).
  Or, A est échelonnée, donc les $n - m$ colonnes non nulles de ${}^tA$ sont échelonnées et forment donc une famille libre. Ces $n - m$ colonnes forment donc une base de $\text{Im}({}^tA)$.
  D'où :
  $$\text{rg}({}^tA) = n - m$$
  Conclusion : le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A.

⋆

Exemple 6

Déterminons les valeurs du réel λ de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

On a :

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2+\lambda & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, elle est donc non inversible si, et seulement si $\left\{\begin{array}{l} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ 4-4\lambda+\lambda^2 = 0 \end{array}\right.$, si et seulement si, $\lambda = 2$.

Conclusion : le seul réel λ tel que la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible est 2.

✍ Rédaction
On pourrait se contenter de raisonner sur l'inversibilité de la matrice, sans travailler sur le rang. Mais le travail sur le rang a un intérêt tout de même... Nous en ferons la remarque en fin d'exemple.

Remarque
Et, d'après la dernière étape de la manipulation sur le rang, on remarque que si $\lambda = 2$, alors la matrice étudiée est de rang 2 (oui, on le voit directement à partir de la matrice initiale... mais imaginez si l'on travaille sur des matrices plus grandes) ; donc son noyau est de dimension 1 (théorème du rang). Ceci nous sera utile dans le chapitre sur la diagonalisation des matrices.

On a aussi :

Propriétés 10

P1 Si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même rang.

P2 Soient $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
Alors :
$$\text{rg}(g) = \text{rg}\big(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)\big)$$
Autrement dit : le rang de g est égal au rang de toutes les matrices représentant g dans toutes les bases de E et F.

☞ Pour info...
On dit parfois que le rang est invariant par changement de base.

⋆ Démonstration :

P1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que M et N sont semblables. Il existe ainsi une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que nous considérons ensuite, telle que $M = PNP^{-1}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg}(PNP^{-1}) && \text{propriétés 7 - P2} \\ &= \text{rg}(NP^{-1}) && \text{propriétés 7 - P2} \\ &= \text{rg}(N) \end{aligned}$$

Conclusion : si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même rang.

P2. Notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$ et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$. Par définition :

$$\begin{aligned} \text{rg}(g) &= \dim\big(\text{Im}(g)\big) && (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \text{ est une base de } E \text{, donc en est une famille génératrice} \\ &= \dim\Big(\text{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \dots, g(\vec{e}_p)\big)\Big) \end{aligned}$$

Ensuite, remarquons que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)$. Par définition :

$$\text{rg}\big(\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\big) = \dim\big(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)\big)$$

♣ L'idée !
Trouver un isomorphisme entre $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)\big)$ et $\text{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \dots, g(\vec{e}_p)\big)$.

Considérons l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1 \vec{f}_1 + \dots + x_n \vec{f}_n \end{array} \right.$$

- Sans difficulté, φ est linéaire.
- Puisque $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est une base de F, on obtient que φ est bijective.

L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans F.
Par conséquent, sa restriction à $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, notée $\varphi_{|\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)}$ est un isomorphisme de $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ dans $\text{Im}(\varphi_{|\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)})$.
Or, par définition, $(C_1, \dots, C_p)$ est génératrice de $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, d'où :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi_{|\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)}) &= \text{Vect}\big(\varphi(C_1), \dots, \varphi(C_p)\big) && \text{par définition de } \text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g) : \forall j \in [\![1; p]\!],\ \varphi(C_j) = g(\vec{e}_j) \\ &= \text{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \dots, g(\vec{e}_p)\big) \end{aligned}$$

L'application $\varphi_{|\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)}$ est donc un isomorphisme de $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ dans $\text{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \dots, g(\vec{e}_p)\big)$.
Conclusion : les espaces vectoriels $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ et $\text{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \dots, g(\vec{e}_p)\big)$ ont même dimension ; autrement dit :

$$\text{rg}(g) = \text{rg}\big(\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\big)$$

⋆

EXEMPLE 7

Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_3[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

- Justifions que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$, puis déterminons sa matrice canoniquement associée.

✘ Attention !
Il s'agit d'une égalité de fonctions...

  ∗ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$. Démontrons $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) && \text{linéarité de l'évaluation en } x+1 \text{ et en } x \\ &= \lambda\big(P(x+1) - P(x)\big) + \mu\big(Q(x+1) - Q(x)\big) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

  On a ainsi établi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x)$$

  Autrement dit :

$$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

  Conclusion : f est une application linéaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.

  ∗ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2 + dx$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 - (a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= a + b(x+1) + c(x^2 + 2x + 1) + d(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= b + c + d + (2c + 3d)x + 3dx^2 \end{aligned}$$

  Par conséquent : $f(P) \in \mathbb{R}_3[x]$.
  Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

Remarque
On pourrait également dire que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieure ou égal à 3, comme différence de deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3...

* Ensuite, en notant (P_0, P_1, P_2, P_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, et en utilisant la calcul fait ci-dessus, on obtient immédiatement :

$$f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \quad ; \quad f(P_1) = P_0 \quad ; \quad f(P_2) = P_0 + 2P_1 \quad ; \quad f(P_3) = P_0 + 3P1 + 3P_2$$

D'où la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, que nous noterons A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déduisons-en une base du noyau et de l'image de f ainsi que son rang.
  * On remarque alors que $\text{rg}(A) = 3$. Donc :
  $$\text{rg}(f) = 3$$
  * Ainsi, par théorème du rang :
  $$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$
  Or $P_0 \in \ker(f)$.Donc la famille (P_0) est une famille de $\ker(f)$ qui est :
    - ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
    - ✓ de cardinal 1, égal à la dimension de $\ker(f)$.

  Conclusion : (P_0) est une base de $\ker(f)$.
  * Enfin :

$$\begin{aligned}
\text{Im}(A) &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_3 \leftarrow 2C_3 - 3C_1}{=} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  Conclusion : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \mathbb{R}_2[x]$.

Remarque

On retrouve le fait que $P_0 \in \ker(f)$ avec la matrice de f. En effet : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \ker(A)$; et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \text{Mat}_{bc}(P_0)$ et $A = \text{Mat}_{bc}(f)$.

♣ Méthode !

On utilise Chapitre 1 - Propriétés 3 pour transformer la famille qui engendre $\text{Im}(A)$...

Remarques

- Volontairement, j'ai choisi de travailler sur la matrice associée pour bien mettre en évidence que la recherche de noyau, d'image et de rang peut toujours être faite par la matrice ; à condition, **pour le noyau et l'image, de conclure avec les bons objets !**
- A partir du calcul générique de $f(P)(x)$ qui précède, on peut dire que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$... et $\text{rg}(f) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big)$. Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$.