Exercices du chapitre 8
Variables aléatoires à densité

Technique

Exercice 1 - ●○○

Déterminer le réel a de sorte que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \in [0;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

Exercice 2 - ●○○ - Densité et fonction de répartition

Dans chaque cas, démontrer que la fonction f est une densité de probabilité puis déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f comme densité.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1;0[\\ 1-x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f : x \longmapsto e^{-x-e^{-x}}$
5. $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{3}{2x^4} & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1;1[\\ \dfrac{3}{2x^4} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Entraînement

Exercice 3 - ●●○ - Ni discrète ni à densité

On considère la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition est F. Notons Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geqslant 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de Y.
3. En déduire que Y n'est ni discrète ni à densité.

Exercice 4 - ●●○

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Construire sa représentation graphique.
3. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X \geqslant \frac{1}{2}]}\left(\left[X \leqslant \dfrac{3}{2}\right]\right)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ puis en déduire l'espérance de X.
5. Calculer de même le moment d'ordre 2 de X.

Exercice 5 - ●●○

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \dfrac{|t|}{(1+t^2)^2}$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité. *Soit alors X une variable aléatoire de densité f.*
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Démontrer que X admet une espérance et en donner la valeur.
5. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

Exercice 6 - ●●○ - Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{si } x < b \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. 3.a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

   3.b. Montrer que X admet une variance si, et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

4. Établir : $\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+y]\big) = 1$.

Concours

Exercice 7 – ●●○ - EML 2003 E

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ converge et donner sa valeur.
2. Montrer que f est une fonction de densité. Dans la suite X désigne une variable aléatoire de densité f.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

On considère trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X.

5. On pose $U = \min(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.
   5.a. Montrer que U est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
   5.b. Montrer que U admet une espérance et la calculer.
6. On pose $V = \max(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
   6.a. Montrer que V est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
   6.b. La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?

Exercice 8 – ●●○ - EML 2001 E

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction $f_n : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
   1.b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)dt$.
   1.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1$.
   1.d. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n possède une espérance et une variance et que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{V}(X_n) = n+1$.
3. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute entre les instants 0 et t.
   On suppose que Y_t suit la loi de Poisson de paramètre t.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_n prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et égale à l'instant d'arrivée de la n-ième voiture au péage à partir de l'instant 0.
   3.a. Rappeler, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la loi de Y_t ainsi que son espérance et sa variance.
   3.b. Soient $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Établir : $[Z_n \leqslant t] = [Y_t \geqslant n]$.
   3.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de Z_n.
   3.d. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction f_{n-1}.

Exercice 9 – ●●○ - Type oral

1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire de densité f.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. Montrer que les variables aléatoires X et $\dfrac{1}{X}$ ont même loi.

Exercice 10 – ●●● - Type oral

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. On considère la variable aléatoire $Y = X + |X|$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur X pour que Y soit à densité.