

## EXERCICES DU CHAPITRE 8

### REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

### ENTRAÎNEMENT

#### EXERCICE 1 – ●●○

Soient  $E = \mathbb{R}_2[x]$  et  $f$  l'application qui à  $P \in E$  associe la fonction  $f(P)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = P(x) - xP'(x)$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , puis donner sa matrice dans la base canonique de  $E$ .
2. Déterminer  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

#### EXERCICE 2 – ●●○

Considérons l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , noté  $f$ , canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le rang de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif?
2. Montrer que  $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
3. En déduire que  $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ , puis déterminer des bases de  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
4. Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\vec{u} \notin \ker(f)$ ,  $\vec{v} \in \ker(f)$  et  $\vec{v} \notin \text{Vect}(f(\vec{u}))$ .  
 Montrer que la famille  $(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , puis déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.

### CONCOURS

#### EXERCICE 3 – ●●○ – Ecririme 2003 E

Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .

1. Déterminer les réels  $\lambda$  de sorte que l'endomorphisme  $f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  ne soit pas bijectif.
2. Justifier que l'on peut choisir une base de  $\ker(f - \text{id})$  constituée d'un unique vecteur dont la première composante est égale à 1. On notera  $e_1$  ce vecteur.
3. Justifier que l'on peut choisir une base de  $\ker(f - 2\text{id})$  constituée d'un unique vecteur dont la seconde composante est égale à 1. On notera  $e_2$  ce vecteur.
4. Déterminer un vecteur  $e_3 \in \mathbb{R}^3$  de sorte que  $f(e_3) = e_2 + 2e_3$ .
5. Démontrer que la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ ; puis donner la matrice de  $f$  dans cette base, notée  $T$ .
6. Exprimer  $A$  en fonction de  $T, P, P^{-1}$ , où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
7. **7.a.** Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $T^n$  en fonction de  $n$ .  
**7.b.** En déduire l'écriture matricielle de  $A^n$  en fonction de  $n$ .
8. Soit  $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ .  
**8.a.** Montrer que  $\mathcal{C}_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .  
**8.b.** Pour  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  on pose  $M' = P^{-1}MP$ . Montrer que :

$$M \in \mathcal{C}_A \iff TM' = M'T$$

**8.c.** Montrer ensuite que  $M'$  vérifie  $TM' = M'T$  si, et seulement si, il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

**8.d.** En déduire que  $M$  appartient à  $\mathcal{C}_A$  si, et seulement si, il existe trois réels  $a, b, c$  tels que :  $M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ .

**8.e.** Déterminer alors une base de  $\mathcal{C}_A$ , puis préciser sa dimension.

### POUR ALLER PLUS LOIN...

#### EXERCICE 4 – ●●○ – Rang et composition

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  ainsi que  $f, g, h$  trois endomorphismes de  $E$ .  
 L'objectif de l'exercice est d'établir les trois résultats suivants :

1. Supposons que  $h$  est surjective. Démontrer que  $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f)$ .
2. Supposons que  $g$  est injective.

2.a. Considérons l'application  $g|_{\text{Im}(f)}$  : restriction de  $g$  à  $\text{Im}(f)$ .

Autrement dit :

$$g|_{\text{Im}(f)} : \left\{ \begin{array}{ll} \text{Im}(f) & \longrightarrow G \\ \vec{u} & \longmapsto g(\vec{u}) \end{array} \right.$$

Montrer que  $g|_{\text{Im}(f)}$  est injective.

2.b. En déduire que  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ .

### EXERCICE 5 - ●●● - Rang de la transposée

Soient  $n, p \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . L'objectif de l'exercice est d'établir :  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$ .

#### 1. Résultats préliminaires.

1.a. Démontrer que pour toutes matrices  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  :  $\text{rg}(BC) \leq \min(\text{rg}(B), \text{rg}(C))$ .

1.b. Établir :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad ({}^tY Y = 0 \iff Y = 0_{n,1})$$

#### 2. Supposons dans cette question que $n = p$ .

2.a. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Démontrer :  $AX = 0_{n,1} \iff {}^tAAX = 0_{n,1}$ .

2.b. En déduire que  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tAA)$  et que  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A{}^tA)$ .

2.c. Conclure que  $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$ .

#### 3. Montrer que le résultat est encore vrai dans le cas où $n \neq p$ .