Les Chartreux

8

Analyse

Séries numériques

Introduction...

Pour commencer, que penser de l'égalité ci-dessous, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920, indien) avait écrite dans une lettre envoyée à Godfrey Hardy (1877-1947, anglais) ?

$$1+2+3+4+\ldots=\frac{-1}{12}$$

La notion de somme infinie est au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires... mais elle est en fait liée à la notion de limite de suite, qui n'a été rigoureusement introduite qu'aux XVIII et XIX$^{\text{ème}}$ siècles. La conséquence de cet écart entre la volonté de manipulation d'une somme infinie et sa définition rigoureuse : des confusions, des interrogations et des paradoxes, comme les célèbres paradoxes de Zénon ; ou bien des égalités du type de celle écrite ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous allons définir ces objets afin de donner un cadre d'étude et de calculs de ces *sommes infinies*.

Quelques "réponses" à cette fameuse égalité : ici ou là...

Pour bien démarrer...

1. Soit $q \in]-1;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Établir la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

2. Rappeler le théorème de limite monotone sur les suites.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de suites un peu particulières : les suites dont le terme général est de la forme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est également une suite.
Par exemple, nous allons étudier (entre autres) les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont voici les termes généraux :

- $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Remarque
L'objectif de ce chapitre, qui sera complété en 2A, est en fait d'étudier la nature de la suite (S_n) en utilisant ce que l'on sait de la suite (u_n).

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Remarque
À adapter si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1, 2 ou autre...

I Notion de séries : généralités et premiers exemples

Définitions 1 — Série numérique

D1 La **série de terme général u_n**, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$, est la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

D2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n de la série est la **somme partielle d'indice n (de rang n)** de la série ; et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles.

✘ Attention !
$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas un nombre !

En gros...
Une série est une suite de sommes partielles.

Définitions 2 — Convergence & divergence d'une série

D1 La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

D2 La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente ; autrement dit lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite infinie ou pas de limite.

D3 Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite : c'est la **somme de la série**.

✓ Rigueur !
$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ désigne la série, autrement dit une suite, qui est soit convergente soit divergente ; alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (la limite des sommes partielles, donc un nombre réel) : à ne pas confondre avec la série elle-même et à **ne pas écrire tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée** !

♣ Méthode 1 ♣ **Pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et si besoin calculer sa somme,** on peut :

- calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n (si besoin, faire un télescopage ou un changement d'indice...),
- puis étudier la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

Exemples 1

E1 Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$.

E2 Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{2^n}$.

E3 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculons sa somme.

On voit bien que le cours ne peut se résumer à ce qui précède, sinon, quel intérêt de faire une chapitre spécifique ? Un des moyens d'étudier la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est de passer par la somme partielle, mais l'enjeu du chapitre est le suivant :

> Comment, en étudiant seulement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, peut-on déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?

Malheureusement...
Seule une toute petite partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

II Lien série / terme général...

II.1 Condition nécessaire de convergence

Avec les notations précédentes, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Or, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) &= \lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et on obtient dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Propriété 1 — **Condition nécessaire de convergence / Condition suffisante de divergence**

Voici deux formulations équivalentes du même résultat :

- Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors nécessairement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente ; on dit même que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est grossièrement divergente**.

✘ Attention !
La réciproque est fausse : pour que $\sum u_n$ soit convergente il n'est pas suffisant que (u_n) tende vers 0 !

⋆ Démonstration : Faite ci-dessus (le deuxième énoncé est la contraposée du premier). ⋆

Exemples 2

E1 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n+1}$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

E2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Démontrons-le.

Vocabulaire
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. Mais pourquoi ?!

- Démontrons : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

- Déduisons-en : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

- Concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

II.2 Séries télescopiques

Propriété 2 — Séries télescopiques

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.

Remarque

Résultat qui n'a, pour l'instant, pas grand intérêt. Il servira davantage en 2A avec l'utilisation des critères de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.

⋆ Démonstration :

⋆

III Séries usuelles

Voyons maintenant les séries usuelles, qui seront, en particulier, très utiles dans les prochains chapitres de probabilités.

Propriétés 3 — Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.
Les séries $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, pour tout $q \in]-1;1[$:

P1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

P2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

P3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

✘ Attention !

Ne pas oublier l'hypothèse sur q.

⋆ Démonstration :

P1.

- Si $q \notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est grossièrement divergente.
- Si $q \in]-1;1[$:
  On a :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
  Or $q \in]-1;1[$, donc $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$; et, par opérations sur les limites, on obtient
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

P2.

- Si $q \notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $(nq^{n-1})_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est grossièrement divergente.
- Si $q \in]-1;1[$:
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$. Ainsi, pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

  Or la fonction f est dérivable sur $]-1;1[$, car polynomiale et d'après ce qui précède, on a :
  - d'une part, pour tout $x \in]-1;1[$:
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$
  - et d'autre part, pour tout $x \in]-1;1[$:
$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

  D'où, en évaluant en q, licite car $q \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

  Or $q \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)q^n = 0$. Par opérations sur les limites, on obtient ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

  Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

P3.

- Si $q \notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $\left(n(n-1)q^{n-2}\right)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est grossièrement divergente.
- Si $q \in]-1;1[$:
  On reprend la méthode précédente et on dérive à nouveau f...

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque

Notons que les séries géométriques dérivée et dérivée seconde ont respectivement le premier et les deux premiers termes nuls. Ainsi, en cas de convergence :
$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exemples 3

E1 Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n}$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

E2 Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^2}{4}\right)^n$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

Lemme 1 — Un résultat de croissances comparées

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

⋆ Démonstration : *Sous forme d'exercice.*

Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)=\frac{x^n}{n!}$.

- Si $x=0$:
  Le résultat est immédiat car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(0)=0$.
- Si $x\neq 0$:
  - ✱ Démontrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n\in[\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}\leqslant\frac{1}{2}$$

* Déduisons-en :

$$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

puis concluons.

⋆

Propriété 4 — **Série exponentielle**

Pour tout réel x, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

Remarque

On peut alors retenir la CC du lemme précédent en se souvenant simplement que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

⋆ Démonstration : *Sous forme d'exercice.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!} dt$$

Remarque

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, utilisant des notions plus ou moins sophistiquées. Je choisis ici une démonstration avec des intégrales ; mais on peut en trouver une plus élémentaire (mais plus longue) dans le DS3 de l'année 2022-2023.

- Posons $M = \max(e^x, 1)$. Démontrons que

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Concluons.

⋆

Exemples 4

E1 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e.

E2 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e^{-3}.

E3 La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{-2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $-e^2$.

IV Quelques résultats sur la convergence

Propriétés 5 — Combinaisons linéaires sur les séries

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

P1 Si $\lambda\neq 0$, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

P2 Si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est convergente et : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

P3 Si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est divergente.

✘ Attention ! On ne peut rien dire de la série $\sum(u_n+v_n)$ dans le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes : les deux cas peuvent se produire (sauf si (u_n) et (v_n) sont à termes positifs).

⋆ Démonstration : Ces propriétés découlent de la linéarité de la somme et des propriétés sur les limites de suites... ⋆

Pour finir, une dernière propriété dont la démonstration est immédiate :

Propriété 6 — Série tronquée

Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$.

Les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-\sum_{n=0}^{n_0-1}u_n$.

En gros... La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Exemples 5

E1 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.

- On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\frac{5\times 2^n+1}{n!}=5\times\frac{2^n}{n!}+\frac{1}{n!}$.
- Or $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ sont des séries exponentielles convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5\times 2^n+1}{n!}&=5\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\&=5e^2+e\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $5e^2+e$.

Rédaction Première rédaction : on travaille sur le terme général, on justifie la convergence puis on calcule la somme de la série.

E2 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout, $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{n+3}{2^n}&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{N}3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Rédaction Deuxième rédaction : on travaille sur les sommes partielles, on justifie la convergence puis on passe à la limite. Dans la suite, je vais privilégier cette rédaction qui permet changements d'indice et télescopages.

Or $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ donc les séries $\sum_{n\geqslant 0}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+3}{2^n}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2^2}} + 3\frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 8.

E3 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et calculons sa somme.

E4 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

E5 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n}$ est convergente et calculons sa somme.

E6 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.