



8

SÉRIES NUMÉRIQUES

INTRODUCTION...

Pour commencer, que penser de l'égalité ci-dessous, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920, indien) avait écrite dans une lettre envoyée à Godfrey Hardy (1877-1947, anglais) ?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \frac{-1}{12}$$

La notion de somme infinie est au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires... mais elle est en fait liée à la notion de limite de suite, qui n'a été rigoureusement introduite qu'aux XVIII et XIX^{ème} siècles. La conséquence de cet écart entre la volonté de manipulation d'une somme infinie et sa définition rigoureuse : des confusions, des interrogations et des paradoxes, comme les célèbres paradoxes de Zénon ; ou bien des égalités du type de celle écrite ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous allons définir ces objets afin de donner un cadre d'étude et de calculs de ces *sommes infinies*.

Quelques "réponses" à cette fameuse égalité : [ici](#) ou [là](#)...

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soit $q \in]-1; 1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Établir la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
2. Rappeler le théorème de limite monotone sur les suites.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de suites un peu particulières : les suites dont le terme général est de la forme

$\sum_{k=0}^n u_k$, où $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est également une suite.

Par exemple, nous allons étudier (entre autres) les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont voici les termes généraux :

$\bullet \ S_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$

$\bullet \ S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

$\bullet \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$\bullet \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Remarque

L'objectif de ce chapitre, qui sera complété en 2A, est en fait d'étudier la nature de la suite (S_n) en utilisant ce que l'on sait de la suite (u_n) .

Remarque

À adapter si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1, 2 ou autre...

I NOTION DE SÉRIES : GÉNÉRALITÉS ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 1

SÉRIE NUMÉRIQUE

- D1** La **série de terme général** u_n , notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$, est la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- D2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n de la série est la **somme partielle d'indice n (de rang n)** de la série ; et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles.

⚠ Attention !

$\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas un nombre !

En gros...

Une série est une suite de sommes partielles.

DÉFINITIONS 2

CONVERGENCE & DIVERGENCE D'UNE SÉRIE

- D1** La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.
- D2** La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente ; autrement dit lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite infinie ou pas de limite.
- D3** Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite : c'est la **somme de la série**.

✓ Rigueur !

$\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série, autrement dit une suite, qui est soit convergente soit divergente ; alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (la limite des sommes partielles, donc un nombre réel) : à ne pas confondre avec la série elle-même et à **ne pas écrire tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée !**

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ et si besoin calculer sa somme, on peut :

- calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n (si besoin, faire un télescopage ou un changement d'indice...),
- puis étudier la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

EXEMPLES 1

E1 Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 0} n$.

E2 Étudions la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$.

E3 Justifions que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculons sa somme.

On voit bien que le cours ne peut se résumer à ce qui précède, sinon, quel intérêt de faire un chapitre spécifique ? Un des moyens d'étudier la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$ est de passer par la somme partielle, mais l'enjeu du chapitre est le suivant :

Comment, en étudiant seulement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, peut-on déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} u_n$?

Malheureusement...

Seule une toute petite partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

II LIEN SÉRIE / TERME GÉNÉRAL...

II.1 CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE

Avec les notations précédentes, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Or, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1} - S_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et on obtient dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Voici deux formulations équivalentes du même résultat :

- Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors nécessairement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente ; on dit même que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est grossièrement divergente.

✗ **Attention !**

La réciproque est fautive : pour que $\sum u_n$ soit convergente il n'est pas suffisant que (u_n) tende vers 0 !

★ DÉMONSTRATION : Faite ci-dessus (le deuxième énoncé est la contraposée du premier).

★

EXEMPLES 2

E1 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1}$ est grossièrement divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

E2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Démontrons-le.

- Démontrons : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

Vocabulaire

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. Mais pourquoi ?!



- Dédisons-en : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

- Concluons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

PROPRIÉTÉ 2

SÉRIES TÉLESCOPIQUES

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Remarque

Résultat qui n'a, pour l'instant, pas grand intérêt. Il servira davantage en 2A avec l'utilisation des critères de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.

★ DÉMONSTRATION :

★

III SÉRIES USUELLES

Voyons maintenant les séries usuelles, qui seront, en particulier, très utiles dans les prochains chapitres de probabilités.

PROPRIÉTÉS 3

SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Soit $q \in \mathbb{R}$.

Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et, pour tout $q \in]-1; 1[$:

P1 $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

P2 $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

P3 $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

⚠ Attention !

Ne pas oublier l'hypothèse sur q .

★ DÉMONSTRATION :

P1. • Si $q \notin]-1; 1[$:
Dans ce cas, la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} q^n$ est grossièrement divergente.

• Si $q \in]-1; 1[$:
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Or $q \in]-1; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$; et, par opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

P2. • Si $q \notin]-1; 1[$:

Dans ce cas, la suite $(nq^{n-1})_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ est grossièrement divergente.

• Si $q \in]-1; 1[$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$. Ainsi, pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n x^k - 1 \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 \end{aligned}$$

Or la fonction f est dérivable sur $] -1; 1[$, car polynomiale et d'après ce qui précède, on a :

* d'une part, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

* et d'autre part, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'où, en évaluant en q , licite car $q \in]-1; 1[$:

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Or $q \in]-1; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ et par croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)q^n = 0$. Par opérations sur

les limites, on obtient ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

P3. • Si $q \notin]-1; 1[$:

Dans ce cas, la suite $(n(n-1)q^{n-2})_{n \geq 2}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ est grossièrement divergente.

• Si $q \in]-1; 1[$:

On reprend la méthode précédente et on dérive à nouveau f ...

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque

Notons que les séries géométriques dérivée et dérivée seconde ont respectivement le premier et les deux premiers termes nuls.

Ainsi, en cas de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} \end{aligned}$$

★

EXEMPLES 3

E1 Étudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

E2 Étudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^2}{4}\right)^n$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

LEMME 1

UN RÉSULTAT DE CROISSANCES COMPARÉES

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

***** DÉMONSTRATION : *Sous forme d'exercice.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

- Si $x = 0$:
Le résultat est immédiat car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$:
* Montrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \leq \frac{1}{2}$$

* Dédisons-en :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

puis concluons.

★

PROPRIÉTÉ 4

SÉRIE EXPONENTIELLE

Pour tout réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

★

DÉMONSTRATION : *Sous forme d'exercice.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt$$

Remarque

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, utilisant des notions plus ou moins sophistiquées. Je choisis ici une démonstration avec des intégrales ; mais on peut en trouver une plus élémentaire (mais plus longue) dans le DS3 de l'année 2022-2023.

- Posons $M = \max(e^x, 1)$. Montrons que

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Concluons.

★

EXEMPLES 4

E1 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e.

E2 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e^{-3} .

E3 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{-2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $-e^2$.

IV QUELQUES RÉSULTATS SUR LA CONVERGENCE

PROPRIÉTÉS 5

COMBINAISONS LINÉAIRES SUR LES SÉRIES

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

P1 Si $\lambda \neq 0$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

P2 Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente et : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

P3 Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est divergente.

⚠ Attention !

On ne peut rien dire de la série $\sum (u_n + v_n)$ dans le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes : les deux cas peuvent se produire (sauf si (u_n) et (v_n) sont à termes positifs).

★ DÉMONSTRATION : Ces propriétés découlent de la linéarité de la somme et des propriétés sur les limites de suites...★

Pour finir, une dernière propriété dont la démonstration est immédiate :

PROPRIÉTÉ 6

SÉRIE TRONQUÉE

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$.

En gros...

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

EXEMPLES 5

E1 Justifions que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.

- On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{5 \times 2^n + 1}{n!} = 5 \times \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{n!}$.
- Or $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ sont des séries exponentielles convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!} &= 5 \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 5e^2 + e \end{aligned}$$

✍ Rédaction

Première rédaction : on travaille sur le terme général, on justifie la convergence puis on calcule la somme de la série.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $5e^2 + e$.

E2 Justifions que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout, $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n+3}{2^n} &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^N 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$ donc les séries $\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

✍ Rédaction

Deuxième rédaction : on travaille sur les sommes partielles, on justifie la convergence puis on passe à la limite. Dans la suite, je vais privilégier cette rédaction qui permet changements d'indice et télescopes.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2^2}} + 3 \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 8.

E3 Justifions que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et calculons sa somme.

E4 Justifions que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

E5 Justifions que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$ est convergente et calculons sa somme.

E6 Justifions que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.