



# 8

## SÉRIES NUMÉRIQUES

---

### INTRODUCTION...

Pour commencer, que penser de l'égalité ci-dessous, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920, indien) avait écrite dans une lettre envoyée à Godfrey Hardy (1877-1947, anglais) ?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \frac{-1}{12}$$

La notion de somme infinie est au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires... mais elle est en fait liée à la notion de limite de suite, qui n'a été rigoureusement introduite qu'aux XVIII et XIX<sup>ème</sup> siècles. La conséquence de cet écart entre la volonté de manipulation d'une somme infinie et sa définition rigoureuse : des confusions, des interrogations et des paradoxes, comme les célèbres paradoxes de Zénon ; ou bien des égalités du type de celle écrite ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous allons définir ces objets afin de donner un cadre d'étude et de calculs de ces *sommes infinies*.

Quelques "réponses" à cette fameuse égalité : [ici](#) ou [là](#)...

## POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soit  $q \in ]-1; 1[$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ . Établir la convergence de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser sa limite.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n q^k \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} q \neq 1$$

Or  $q \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

Par opérations, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Conclusion : la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{1 - q}$ .

2. Rappeler le théorème de limite monotone sur les suites.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, alors elle possède une limite en  $+\infty$ .

Plus précisément :

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et non majorée, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée, alors elle converge.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et non minorée, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

L'objectif de ce chapitre est l'étude de suites un peu particulières : les suites dont le terme général est de la forme

$\sum_{k=0}^n u_k$ , où  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est également une suite.

Par exemple, nous allons étudier (entre autres) les suites  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont voici les termes généraux :

$$\bullet S_n = \sum_{k=0}^n k 2^k \quad \bullet S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \bullet S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \bullet S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Dans tout ce chapitre,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite définie sur  $\mathbb{N}$ .

#### Remarque

L'objectif de ce chapitre, qui sera complété en 2A, est en fait d'étudier la nature de la suite  $(S_n)$  en utilisant ce que l'on sait de la suite  $(u_n)$ .

#### Remarque

À adapter si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1, 2 ou autre...

## I NOTION DE SÉRIES : GÉNÉRALITÉS ET PREMIERS EXEMPLES

### DÉFINITIONS 1

### SÉRIE NUMÉRIQUE

**D1** La **série de terme général**  $u_n$ , notée  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ou  $\sum u_n$ , est la suite  $(S_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

**D2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $S_n$  de la série est la **somme partielle d'indice  $n$  (de rang  $n$ )** de la série ; et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des sommes partielles.

#### ✗ Attention !

$\sum_{n \geq 0} u_n$  n'est pas un nombre !

#### En gros...

Une série est une suite de sommes partielles.

### DÉFINITIONS 2

### CONVERGENCE & DIVERGENCE D'UNE SÉRIE

**D1** La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est **convergente** lorsque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles converge.

**D2** La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente ; autrement dit lorsque  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite infinie ou pas de limite.

**D3** Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente, on notera  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  sa limite : c'est la **somme de la série**.

#### ✓ Rigueur !

$\sum_{n \geq 0} u_n$  désigne la série, autrement dit une suite, qui est soit convergente soit divergente ; alors que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  désigne la somme de la série (la limite des sommes partielles, donc un nombre réel) : à ne pas confondre avec la série elle-même et à ne pas écrire tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée !

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour étudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et si besoin calculer sa somme, on peut :

- calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme partielle  $S_n$  (si besoin, faire un télescopage ou un changement d'indice...),
- puis étudier la limite de  $S_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### EXEMPLES 1

**E1** Étudions la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} n$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Or  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N(N+1)}{2} = +\infty$ . Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N n = +\infty$$

**Conclusion** : la série  $\sum_{n \geq 0} n$  est divergente.

#### Remarque

On a souvent l'habitude de changer l'indice de la somme en passant aux sommes partielles... Mais pour commencer, il est peut-être préférable de garder  $n$ .

**E2** Étudions la nature de la série  $\sum \frac{1}{2^n}$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^k} &= \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \curvearrowright \quad \frac{1}{2} \neq 1$$

#### Rappel...

Pour tout  $q \neq 1$  et tous  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $n \geq p$  :

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right)$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = 2$$

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$  est convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ .

**E3** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

↙ télescopage

Or  $\lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ .

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  est convergente et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

★ Classique ! ★

Je détaille volontairement ce calcul, mais on peut aller plus vite : c'est un grand classique.

On voit bien que le cours ne peut se résumer à ce qui précède, sinon, quel intérêt de faire un chapitre spécifique ? Un des moyens d'étudier la nature de  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est de passer par la somme partielle, mais l'enjeu du chapitre est le suivant :

Comment, en étudiant seulement  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , peut-on déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ?

**Malheureusement...**

Seule une toute petite partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

## II LIEN SÉRIE / TERME GÉNÉRAL...

### II.1 CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE

Avec les notations précédentes, remarquons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Or, si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est convergente, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1} - S_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et on obtient dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Voici deux formulations équivalentes du même résultat :

- Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente, alors nécessairement,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est divergente ; on dit même que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est grossièrement divergente.

✗ **Attention !**

La réciproque est fautive : pour que  $\sum u_n$  soit convergente il n'est pas suffisant que  $(u_n)$  tende vers 0 !

★ DÉMONSTRATION : Faite ci-dessus (le deuxième énoncé est la contraposée du premier).

## EXEMPLES 2

**E1** La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1}$  est grossièrement divergente car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ .

**E2**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et pourtant, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente. Démontrons-le.

- Démontrons :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ .

Posons  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ , définie sur  $] -1; +\infty[$  et  $u : x \mapsto 1+x$  de sorte qu  $f = \ln \circ u - \text{id}$ .

- \* ✓ La fonction  $u$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{++}$  sur cet intervalle,
- ✓ la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{++}$ .

Ainsi, la fonction  $\ln \circ u$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$ . La fonction  $f$  est une somme de deux fonctions dérivables sur  $] -1; +\infty[$ , elle l'est donc également.

- \* Soit  $x \in ] -1; +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

D'où :

|         |    |       |           |
|---------|----|-------|-----------|
| $x$     | -1 | 0     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |    | +     | -         |
| $f$     |    | ↗ 0 ↘ |           |

On en déduit que  $f$  possède un maximum sur  $] -1; +\infty[$  égal à 0, atteint en 0.

Conclusion :  $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ .

- Dédisons-en :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \ln(k+1) - \ln(k) &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &\leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

↙ point précédent avec  $x = \frac{1}{k}$ , licite car  $\frac{1}{k} > -1$

Conclusion :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

- Concluons que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En sommant le résultat du point précédent pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Ainsi, par télescope :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ . D'où, par théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

## Vocabulaire

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est appelée **série harmonique**. Mais pourquoi ?!

## Autre méthode

La fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}^{++}$  donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes ; et en particulier celle en  $(1; 0)$ .  
Pa conséquent :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{++}, \ln(y) \leq y - 1$$

D'où le résultat voulu...

## Remarque

Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

## Important !

C'est l'exemple le plus classique de série divergente qui n'est pas grossièrement divergente. À retenir pour justifier que la réciproque de la propriété 1 est fautive.

## II.2 SÉRIES TÉLESCOPIQUES

### PROPRIÉTÉ 2

### SÉRIES TÉLESCOPIQUES

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  ont même nature.

#### Remarque

Résultat qui n'a, pour l'instant, pas grand intérêt. Il servira davantage en 2A avec l'utilisation des critères de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.

★ DÉMONSTRATION : Il s'agit de démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  est

convergente.

Remarquons déjà que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \quad (*)$$

Puis raisonnons par double implication.

⇒ Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ .  
Dans ce cas, d'après (\*), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  est convergente.

⇐ Supposons que la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  est convergente de somme égale à  $S$ .

Dans ce cas, d'après (\*), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0 + S$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Conclusion : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  est convergente.

★

## III SÉRIES USUELLES

Voyons maintenant les séries usuelles, qui seront, en particulier, très utiles dans les prochains chapitres de probabilités.

### PROPRIÉTÉS 3

### SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

Les séries  $\sum_{n \geq 0} q^n$ ,  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$  et  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$  sont convergentes si, et seulement si,  $q \in ]-1; 1[$  et, pour tout  $q \in ]-1; 1[$  :

**P1**  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

**P2**  $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

**P3**  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

#### ✗ Attention !

Ne pas oublier l'hypothèse sur  $q$ .

★ DÉMONSTRATION :

P1. • Si  $q \notin ]-1; 1[$  :

Dans ce cas, la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0. Ainsi,  $\sum_{n \geq 0} q^n$  est grossièrement divergente.

• Si  $q \in ]-1; 1[$  :

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Or  $q \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ ; et, par opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$$

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} q^n$  est convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 0} q^n$  est convergente si, et seulement si,  $q \in ]-1; 1[$  et, le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

P2. • Si  $q \notin ]-1; 1[$  :

Dans ce cas, la suite  $(nq^{n-1})_{n \geq 1}$  ne converge pas vers 0. Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$  est grossièrement divergente.

• Si  $q \in ]-1; 1[$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$ . Ainsi, pour tout  $x \neq 1$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n x^k - 1 \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 \end{aligned}$$

Or la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1; 1[$ , car polynomiale et d'après ce qui précède, on a :

\* d'une part, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

\* et d'autre part, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

D'où, en évaluant en  $q$ , licite car  $q \in ]-1; 1[$  :

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Or  $q \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$  et par croissances comparées :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)q^n = 0$ . Par opérations sur

les limites, on obtient ainsi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ .

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$  est convergente et  $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ .

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$  est convergente si, et seulement si,  $q \in ]-1; 1[$  et, le cas échéant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

P3. • Si  $q \notin ]-1; 1[$  :

Dans ce cas, la suite  $(n(n-1)q^{n-2})_{n \geq 2}$  ne converge pas vers 0. Ainsi,  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$  est grossièrement divergente.

• Si  $q \in ]-1; 1[$  :

On reprend la méthode précédente et on dérive à nouveau  $f$ ...

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$  est convergente si, et seulement si,  $q \in ]-1; 1[$  et, le cas échéant :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

#### Remarque

Notons que les séries géométriques dérivée et dérivée seconde ont respectivement le premier et les deux premiers termes nuls.

Ainsi, en cas de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} \end{aligned}$$

★

### EXEMPLES 3

**E1** Étudions la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$  et, le cas échéant, calculons sa somme.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Or  $\frac{1}{3} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$  est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n}$  est convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$ .

**E2** Étudions la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^2}{4}\right)^n$  et, le cas échéant, calculons sa somme.

On sait que  $e > 2$ , donc par stricte croissance de la fonction  $.^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient :

$$\frac{e^2}{4} > 1$$

Conclusion : la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^2}{4}\right)^n$  est une série géométrique divergente.

## LEMME 1

## UN RÉSULTAT DE CROISSANCES COMPARÉES

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

**\* DÉMONSTRATION : Sous forme d'exercice.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ .

- Si  $x = 0$  :  
Le résultat est immédiat car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n(0) = 0$ .
- Si  $x \neq 0$  :  
\* Démontrons qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $x \neq 0$ , on a  $u_n(x) \neq 0$  et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| \\ &= \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \right| \\ &= \left| \frac{x}{n+1} \right| \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = 0$$

Donc, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \left| \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

En prenant  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ , il existe donc un entier  $n_0$ , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leq \frac{1}{2}$$

**➡ Réflexe !**

Ce résultat nous fait penser à un résultat de limite...

\* Dédudons-en :

$$\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

puis concluons.

× Procédons par récurrence.

— **Initialisation.** Pour  $n = n_0$  :

Immédiat car  $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ .

— **Hérédité.** Soit  $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$ . Supposons que  $|u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$  et démontrons que

$$|u_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|.$$

Par hypothèse de récurrence :

$$|u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

D'où, puisque  $\frac{1}{2} \geq 0$  :

$$\frac{1}{2} |u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

Or, d'après le point précédent, puisque  $|u_n(x)| \geq 0$  :

$$|u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2} |u_n(x)|$$

D'où :

$$|u_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :**  $\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$ .

× Enfin,  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$ . Par conséquent, on a :

$$\checkmark \forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, |u_n(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|;$$

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)| = 0.$$

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x)| = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$$

**Conclusion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

★

#### PROPRIÉTÉ 4

#### SÉRIE EXPONENTIELLE

Pour tout réel  $x$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

★

**DÉMONSTRATION :** *Sous forme d'exercice.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

• Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt$$

#### Remarque

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, utilisant des notions plus ou moins sophistiquées. Je choisis ici une démonstration avec des intégrales ; mais on peut en trouver une plus élémentaire (mais plus longue) dans le DS3 de l'année 2022-2023.

\* **Initialisation.** Pour  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(-t)^0 e^t}{0!} dt &= 1 + \int_0^x e^t dt \\ &= 1 + [e^t]_0^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

\* **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt$  et démontrons que  $e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} +$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1} e^t}{(n+1)!} dt.$$

Procédons à une intégration par partie sur  $\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1} e^t}{(n+1)!} dt$ .

Posons :  $\begin{cases} u : t \mapsto \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v : t \mapsto e^t \end{cases}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0; x]$  et pour tout  $t \in [0; x]$  :

$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1} e^t}{(n+1)!} dt &= \left[ \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^x - \int_0^x \frac{-(x-t)^n}{n!} e^t dt \\ &= \frac{0^{n+1} e^x}{(n+1)!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \\ &= -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \end{aligned} \quad \leftarrow n+1 > 0, \text{ donc } 0^{n+1} = 0$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1} e^t}{(n+1)!} dt &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \\ &= e^x \end{aligned} \quad \leftarrow \text{hypothèse de récurrence}$$

L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt$ .

• Posons  $M = \max(e^x, 1)$ . Démontrons que

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Distinguons deux cas :

\* Si  $x \geq 0$  :

D'après l'inégalité triangulaire, licite car  $0 \leq x$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| &\leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n e^t}{n!} \right| dt \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \end{aligned} \quad \leftarrow \forall t \in [0; x], x-t \geq 0 ; e^t \geq 0$$

Or  $x \geq 0$ , donc par croissance de exp sur  $[0; x]$  :

$$\forall t \in [0; x], e^t \leq e^x$$

Ainsi, puisque pour tout  $t \in [0; x], \frac{(x-t)^n}{n!} \geq 0$ , et par croissance de l'intégrale, licite car  $0 \leq x$ , on obtient :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Puis :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{n!} \left[ \frac{-(x-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{(x-0)^{n+1}}{n+1} \right] \end{aligned} \quad \leftarrow n+1 > 0, \text{ donc } 0^{n+1} = 0$$

**Remarque**  
On peut également la faire sur  $\int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \dots$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

\* Si  $x < 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| &= \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| && \hookrightarrow \text{inégalité triangulaire, licite car } x < 0 \\ &\leq \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^n e^t}{n!} \right| dt && \hookrightarrow \forall t \in [x; 0], x-t \leq 0 ; e^t \geq 0 \\ &\leq \int_0^x \frac{(t-x)^n e^t}{n!} dt \end{aligned}$$

Or  $x < 0$ , donc par croissance de  $\exp$  sur  $[x; 0]$  :

$$\forall t \in [x; 0], e^t \leq 1$$

Ainsi, puisque pour tout  $t \in [x; 0]$ ,  $\frac{(t-x)^n}{n!} \geq 0$ , et par croissance de l'intégrale, licite car  $x \leq 0$ , on obtient :

$$\int_x^0 \frac{(t-x)^n e^t}{n!} dt \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

Puis :

$$\begin{aligned} \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt &= \frac{1}{n!} \int_x^0 (t-x)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 && \hookrightarrow n+1 > 0, \text{ donc } 0^{n+1} = 0 \\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

**Conclusion** : dans les deux cas, on a démontré

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

#### • Conclusions.

On a ainsi :

$$\checkmark \quad 0 \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\checkmark \quad \text{d'après le lemme précédent, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt \right| = 0$ . Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} dt = 0$$

Par conséquent, d'après le premier point, en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

**Conclusion** : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est convergente et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .

★

#### EXEMPLES 4

**E1** La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $e$ .

**E2** La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $e^{-3}$ .

**E3** La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{-2^n}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $-e^2$ .

## IV QUELQUES RÉSULTATS SUR LA CONVERGENCE

### PROPRIÉTÉS 5

### COMBINAISONS LINÉAIRES SUR LES SÉRIES

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

**P1** Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$  sont de même nature et, en cas de convergence, on a :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**P2** Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont convergentes, alors  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  est convergente et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

**P3** Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  est divergente, alors  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  est divergente.

#### ⚠ Attention !

On ne peut rien dire de la série  $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$  dans le cas où  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont divergentes : les deux cas peuvent se produire (sauf si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont à termes positifs).

★ DÉMONSTRATION : Ces propriétés découlent de la linéarité de la somme et des propriétés sur les limites de suites...★

Pour finir, une dernière propriété dont la démonstration est immédiate :

### PROPRIÉTÉ 6

### SÉRIE TRONQUÉE

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ .

Les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  sont de même nature et, en cas de convergence, on a  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$ .

#### En gros...

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

### EXEMPLES 5

**E1** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$  est convergente et calculons sa somme.

- On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\frac{5 \times 2^n + 1}{n!} = 5 \times \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{n!}$ .
- Or  $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$  sont des séries exponentielles convergentes.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$  est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!} &= 5 \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 5e^2 + e \end{aligned}$$

#### ✍ Rédaction

Première rédaction : on travaille sur le terme général, on justifie la convergence puis on calcule la somme de la série.

**Conclusion** : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{5 \times 2^n + 1}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $5e^2 + e$ .

**E2** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout,  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n+3}{2^n} &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^N 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$  donc les séries  $\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  et  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$  est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

#### ✍ Rédaction

Deuxième rédaction : on travaille sur les sommes partielles, on justifie la convergence puis on passe à la limite. Dans la suite, je vais privilégier cette rédaction qui permet changements d'indice et télescopes.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2^2}} + 3 \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 \\
&= 8
\end{aligned}$$

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2^n}$  est convergente et sa somme vaut 8.

**E3** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}} &= \sum_{n=1}^N 5^3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} \\
&= 5^3 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{5}{7}\right)^k \quad \leftarrow k = n-1
\end{aligned}$$

Or  $\frac{5}{7} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{5}{7}\right)^k$  est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$  est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}} &= 5^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k \\
&= 5^3 \frac{1}{1 - \frac{5}{7}} \\
&= \frac{5^3}{\frac{2}{7}} \\
&= \frac{7 \times 5^3}{2}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$  est convergente et sa somme vaut  $\frac{7 \times 5^3}{2}$ .

**E4** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{2^n}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout  $N \in \mathbb{[2; +\infty[}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^N \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{2^n}$  est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{2^n}$  est convergente et sa somme vaut  $\frac{3}{2}$ .

**E5** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{3^n} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1) + n}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^2} \sum_{n=0}^N n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{3} \in ]-1; 1[$ , donc les séries  $\sum_{n \geq 0} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$  et  $\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  sont convergentes.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$  est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} &= \frac{1}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3^2} \frac{2 \times 3^3}{2^3} + \frac{1}{3} \frac{3^2}{2^2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

♥ Astuce du chef ♥

$n^2 = n(n-1) + n$  : utile pour les séries géométriques dérivées seconde

**Conclusion** : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$  est convergente et sa somme vaut  $\frac{3}{2}$ .

**E6** Justifions que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n(-1)^n}{n!}$  est convergente et calculons sa somme.

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , suffisamment proche de  $+\infty$  on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=1}^N \frac{n(-1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \quad \leftarrow k = n-1 \\ &= - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Or la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$  est une série exponentielle convergente.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n(-1)^n}{n!}$  est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n!} &= - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= -e^{-1} \end{aligned}$$

✓ Rigueur !

Il est important de faire commencer la somme à  $n = 1$  pour diviser par  $n$  dans le terme général.

**Conclusion** : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n(-1)^n}{n!}$  est convergente et sa somme vaut  $-e^{-1}$ .