Les Chartreux

8

Analyse

Séries numériques

Introduction...

Pour commencer, que penser de l'égalité ci-dessous, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920, indien) avait écrite dans une lettre envoyée à Godfrey Hardy (1877-1947, anglais) ?

$$1+2+3+4+\ldots=\frac{-1}{12}$$

La notion de somme infinie est au cœur des mathématiques depuis plus de deux millénaires... mais elle est en fait liée à la notion de limite de suite, qui n'a été rigoureusement introduite qu'aux XVIII et XIX$^{\text{ème}}$ siècles. La conséquence de cet écart entre la volonté de manipulation d'une somme infinie et sa définition rigoureuse : des confusions, des interrogations et des paradoxes, comme les célèbres paradoxes de Zénon ; ou bien des égalités du type de celle écrite ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous allons définir ces objets afin de donner un cadre d'étude et de calculs de ces *sommes infinies*.

Quelques "réponses" à cette fameuse égalité : ici ou là...

Pour bien démarrer...

1. Soit $q \in]-1;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Établir la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned} \qquad \text{↙ } q \neq 1$$

   Or $q \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   Par opérations, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

   Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

2. Rappeler le théorème de limite monotone sur les suites.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors elle possède une limite en $+\infty$.
   Plus précisément :
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de suites un peu particulières : les suites dont le terme général est de la forme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est également une suite.
Par exemple, nous allons étudier (entre autres) les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont voici les termes généraux :

- $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Remarque
L'objectif de ce chapitre, qui sera complété en 2A, est en fait d'étudier la nature de la suite (S_n) en utilisant ce que l'on sait de la suite (u_n).

Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Remarque
À adapter si la suite n'est définie qu'à partir du rang 1, 2 ou autre...

I Notion de séries : généralités et premiers exemples

Définitions 1 — Série numérique

D1 La **série de terme général u_n**, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$, est la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

D2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n de la série est la **somme partielle d'indice n (de rang n)** de la série ; et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles.

✘ Attention !
$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est pas un nombre !

En gros...
Une série est une suite de sommes partielles.

Définitions 2 — Convergence & divergence d'une série

D1 La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

D2 La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente ; autrement dit lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite infinie ou pas de limite.

D3 Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite : c'est la **somme de la série**.

✓ Rigueur !
$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ désigne la série, autrement dit une suite, qui est soit convergente soit divergente ; alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (la limite des sommes partielles, donc un nombre réel) : à ne pas confondre avec la série elle-même et à **ne pas écrire tant que la convergence de la série n'a pas été prouvée** !

♣ Méthode 1 ♣ **Pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et si besoin calculer sa somme,** on peut :

- calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle S_n (si besoin, faire un télescopage ou un changement d'indice...),
- puis étudier la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

Exemples 1

E1 Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \frac{N(N+1)}{2} = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} n = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente.

Remarque
On a souvent l'habitude de changer l'indice de la somme en passant aux sommes partielles... Mais pour commencer, il est peut-être préférable de garder n.

E2 Étudions la nature de la série $\sum \frac{1}{2^n}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^k} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{car } \tfrac{1}{2} \neq 1$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

☞ Rappel...
Pour tout $q \neq 1$ et tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant p$:
$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right)$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = 2$$

Conclusion : la série $\sum\limits_{n_geq0} \frac{1}{2^n}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

E3 Justifions que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1-n}{n(n+1)}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{↙ télescopage}$$
$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$.

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

★ Classique ! ★
Je détaille volontairement ce calcul, mais on peut aller plus vite : c'est un grand classique.

On voit bien que le cours ne peut se résumer à ce qui précède, sinon, quel intérêt de faire une chapitre spécifique ? Un des moyens d'étudier la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est de passer par la somme partielle, mais l'enjeu du chapitre est le suivant :

Comment, en étudiant seulement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, peut-on déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

Malheureusement…
Seule une toute petite partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

II Lien série / terme général…

II.1 Condition nécessaire de convergence

Avec les notations précédentes, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$= u_{n+1}$$

Or, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
$$= 0$$

Et on obtient dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Propriété 1 — **Condition nécessaire de convergence / Condition suffisante de divergence**

Voici deux formulations équivalentes du même résultat :

- Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors nécessairement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente ; on dit même que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **est grossièrement divergente**.

✘ Attention !
La réciproque est fausse : pour que $\sum u_n$ soit convergente il n'est pas suffisant que (u_n) tende vers 0 !

⋆ Démonstration : Faite ci-dessus (le deuxième énoncé est la contraposée du premier). ⋆

Exemples 2

E1 La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n+1}$ est grossièrement divergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

E2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Démontrons-le.

Vocabulaire
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**. Mais pourquoi ?!

- Démontrons : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
  Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1;+\infty[$ et $u : x \longmapsto 1+x$ de sorte qu $f = \ln \circ u - \mathrm{id}$.
  - ✓ La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ sur cet intervalle,
    ✓ la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

    Ainsi, la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. La fonction f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, elle l'est donc également.
  - Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$ Réfléchir !

  D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

  On en déduit que f possède un maximum sur $]-1;+\infty[$ égal à 0, atteint en 0.

  Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

Autre méthode
La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes ; et en particulier celle en $(1;0)$. Pa conséquent :
$\forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(y) \leqslant y - 1$
D'où le résultat voulu...

Remarque
Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

- Déduisons-en : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
  Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(k+1) - \ln(k) &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{k} \end{aligned}$$ ↙ point précédent avec $x = \frac{1}{k}$, licite car $\frac{1}{k} > -1$

  Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

- Concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant le résultat du point précédent pour $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

  Ainsi, par télescopage :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. D'où, par théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

  Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Important !
C'est l'exemple le plus classique de série divergente qui n'est pas grossièrement divergente. À retenir pour justifier que la réciproque de la propriété 1 est fausse.

II.2 Séries télescopiques

Propriété 2 — **Séries télescopiques**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.

Remarque

Résultat qui n'a, pour l'instant, pas grand intérêt. Il servira davantage en 2A avec l'utilisation des critères de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.

⋆ Démonstration : Il s'agit de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.
Remarquons déjà que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0 \quad (\star)$$

Puis raisonnons par double implication.

⇒ Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Dans ce cas, d'après $(\star)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_0$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.

⇐ Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente de somme égale à S.
Dans ce cas, d'après $(\star)$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=u_0+S$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.

⋆

III Séries usuelles

Voyons maintenant les séries usuelles, qui seront, en particulier, très utiles dans les prochains chapitres de probabilités.

Propriétés 3 — **Séries géométriques**

Soit $q\in\mathbb{R}$.
Les séries $\sum_{n\geqslant 0}q^n$, $\sum_{n\geqslant 1}nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q\in]-1;1[$ et, pour tout $q\in]-1;1[$:

P1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$

P2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$

P3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)q^{n-2}=\frac{2}{(1-q)^3}$

✘ Attention !

Ne pas oublier l'hypothèse sur q.

⋆ Démonstration :

P1.

- Si $q\notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0}q^n$ est grossièrement divergente.
- Si $q\in]-1;1[$:
  On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Or $q\in]-1;1[$, donc $\lim_{n\to+\infty}q^{n+1}=0$; et, par opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1}{1-q}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

P2.

- Si $q \notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $(nq^{n-1})_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est grossièrement divergente.
- Si $q \in]-1;1[$:
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$. Ainsi, pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

  Or la fonction f est dérivable sur $]-1;1[$, car polynomiale et d'après ce qui précède, on a :
  - d'une part, pour tout $x \in]-1;1[$:
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$
  - et d'autre part, pour tout $x \in]-1;1[$:
$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

  D'où, en évaluant en q, licite car $q \in]-1;1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

  Or $q \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)q^n = 0$. Par opérations sur les limites, on obtient ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

  Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

P3.

- Si $q \notin]-1;1[$:
  Dans ce cas, la suite $\left(n(n-1)q^{n-2}\right)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est grossièrement divergente.
- Si $q \in]-1;1[$:
  On reprend la méthode précédente et on dérive à nouveau f...

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et, le cas échéant :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque

Notons que les séries géométriques dérivée et dérivée seconde ont respectivement le premier et les deux premiers termes nuls. Ainsi, en cas de convergence :
$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exemples 3

E1 Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n}$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Or $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{3^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{3}{2}$.

E2 Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^2}{4}\right)^n$ et, le cas échéant, calculons sa somme.

On sait que $e > 2$, donc par stricte croissance de la fonction $.^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\frac{e^2}{4} > 1$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^2}{4}\right)^n$ est une série géométrique divergente.

Lemme 1 — **Un résultat de croissances comparées**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$$

$\star$ Démonstration : *Sous forme d'exercice.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

- Si $x = 0$:
  Le résultat est immédiat car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$:
  - Démontrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \leqslant \frac{1}{2}$$

Réflexe ! Ce résultat nous fait penser à un résultat de limite...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x \neq 0$, on a $u_n(x) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \\ &= \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| \\ &= \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\times\frac{n!}{(n+1)!}\right| \\ &= \left|\frac{x}{n+1}\right|\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = 0$$

Donc, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \left|\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} - 0\right| \leqslant \varepsilon$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe donc un entier n_0, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \leqslant \frac{1}{2}$$

∗ Déduisons-en :

$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

puis concluons.

× Procédons par récurrence.

— **Initialisation.** Pour $n = n_0$:

Immédiat car $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

— **Hérédité.** Soit $n \in [\![n_0;+\infty[\![$. Supposons que $|u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$ et démontrons que $|u_{n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|$.

Par hypothèse de récurrence :

$$|u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

D'où, puisque $\frac{1}{2} \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2}|u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

Or, d'après le point précédent, puisque $|u_n(x)| \geqslant 0$:

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n(x)|$$

D'où :

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} |u_{n_0}(x)|$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$.

× Enfin, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} | = 0$. Par conséquent, on a :

✓ $\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)|$;

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} |u_{n_0}(x)| = 0$.

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

⋆

Propriété 4 — **Série exponentielle**

Pour tout réel x, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

Remarque

On peut alors retenir la CC du lemme précédent en se souvenant simplement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

⋆ Démonstration : *Sous forme d'exercice.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\,dt$$

Remarque

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, utilisant des notions plus ou moins sophistiquées. Je choisis ici une démonstration avec des intégrales ; mais on peut en trouver une plus élémentaire (mais plus longue) dans le DS3 de l'année 2022-2023.

∗ **Initialisation.** Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(-t)^0\mathrm{e}^t}{0!}dt &= 1+\int_0^x \mathrm{e}^t dt\\ &= 1+\left[\mathrm{e}^t\right]_0^x\\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

∗ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt$ et démontrons que $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}\mathrm{e}^t}{(n+1)!}dt$.

Procédons à une intégration par partie sur $\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}\mathrm{e}^t}{(n+1)!}dt$.

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : t\longmapsto \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\\ v : t\longmapsto \mathrm{e}^t\end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;x]$ et pour tout $t\in[0;x]$: $\left|\begin{array}{l} u'(t) = -\dfrac{(x-t)^n}{n!}\\ v'(t) = \mathrm{e}^t\end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}\mathrm{e}^t}{(n+1)!}dt &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^t\right]_0^x-\int_0^x\frac{-(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t dt\\ &= \frac{0^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt \qquad \text{↙ } n+1>0\text{, donc } 0^{n+1}=0\\ &= -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{n+1}\mathrm{e}^t}{(n+1)!}dt &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt \qquad \text{↙ hypothèse de récurrence}\\ &= \mathrm{e}^x\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt$.

- Posons $M = \max(\mathrm{e}^x, 1)$. Démontrons que

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Distinguons deux cas :

∗ Si $x\geqslant 0$:

D'après l'inégalité triangulaire, licite car $0\leqslant x$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt\right| &\leqslant \int_0^x\left|\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}\right|dt \qquad \text{↙ } \forall t\in[0;x],\ x-t\geqslant 0\ ;\ \mathrm{e}^t\geqslant 0\\ &\leqslant \int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt\end{aligned}$$

Or $x\geqslant 0$, donc par croissance de exp sur $[0;x]$:

$$\forall t\in[0;x],\ \mathrm{e}^t\leqslant \mathrm{e}^x$$

Ainsi, puisque pour tout $t\in[0;x]$, $\frac{(x-t)^n}{n!}\geqslant 0$, et par croissance de l'intégrale, licite car $0\leqslant x$, on obtient :

$$\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt \leqslant \mathrm{e}^x\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

Puis :

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}dt &= \frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n dt\\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \qquad \text{↙ } n+1>0\text{, donc } 0^{n+1}=0\end{aligned}$$

Remarque

On peut également la faire sur $\int_0^x\frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}dt$…

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

* Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| &= \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \\ &\leqslant \int_x^0 \left|\frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\right| dt \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(t-x)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\end{aligned}$$

↘ inégalité triangulaire, licite car $x < 0$

↘ $\forall t \in [x;0],\ x - t \leqslant 0\ ;\ \mathrm{e}^t \geqslant 0$

Or $x < 0$, donc par croissance de exp sur $[x;0]$:

$$\forall t \in [x;0],\ \mathrm{e}^t \leqslant 1$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in [x;0]$, $\frac{(t-x)^n}{n!} \geqslant 0$, et par croissance de l'intégrale, licite car $x \leqslant 0$, on obtient :

$$\int_x^0 \frac{(t-x)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}dt$$

Puis :

$$\begin{aligned}\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}dt &= \frac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n dt \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 \\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

↘ $n+1 > 0$, donc $0^{n+1} = 0$

D'où :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Conclusion : dans les deux cas, on a démontré

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Concluons.
  On a ainsi :
  - ✓ $0 \leqslant \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| \leqslant \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$
  - ✓ d'après le lemme précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt\right| = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}dt = 0$$

  Par conséquent, d'après le premier point, en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$

  Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

⋆

Exemples 4

E1 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e.

E2 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e^{-3}.

E3 La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{-2^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $-e^2$.

IV Quelques résultats sur la convergence

Propriétés 5 — Combinaisons linéaires sur les séries

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

P1 Si $\lambda\neq 0$, alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

P2 Si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est convergente et : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

P3 Si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est divergente.

✘ Attention ! On ne peut rien dire de la série $\sum(u_n+v_n)$ dans le cas où $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes : les deux cas peuvent se produire (sauf si (u_n) et (v_n) sont à termes positifs).

⋆ Démonstration : Ces propriétés découlent de la linéarité de la somme et des propriétés sur les limites de suites... ⋆

Pour finir, une dernière propriété dont la démonstration est immédiate :

Propriété 6 — Série tronquée

Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$.

Les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ sont de même nature et, en cas de convergence, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-\sum_{n=0}^{n_0-1}u_n$.

En gros... La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Exemples 5

E1 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.

- On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\frac{5\times 2^n+1}{n!}=5\times\frac{2^n}{n!}+\frac{1}{n!}$.
- Or $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ sont des séries exponentielles convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5\times 2^n+1}{n!}&=5\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\&=5e^2+e\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{5\times 2^n+1}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $5e^2+e$.

Rédaction Première rédaction : on travaille sur le terme général, on justifie la convergence puis on calcule la somme de la série.

E2 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout, $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{n+3}{2^n}&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{N}3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Rédaction Deuxième rédaction : on travaille sur les sommes partielles, on justifie la convergence puis on passe à la limite. Dans la suite, je vais privilégier cette rédaction qui permet changements d'indice et télescopages.

Or $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ donc les séries $\sum_{n\geqslant 0}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+3}{2^n}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+3}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2^2}} + 3\frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2^2}{2} + 3 \times 2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 8.

E3 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{N} 5^3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} \\
&= 5^3 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{5}{7}\right)^{k}
\end{aligned}
\qquad \text{↙ } k = n-1
$$

Or $\frac{5}{7} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{5}{7}\right)^k$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}} &= 5^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k \\
&= 5^3 \frac{1}{1-\frac{5}{7}} \\
&= \frac{5^3}{\frac{2}{7}} \\
&= \frac{7 \times 5^3}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^{n+2}}{7^{n-1}}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{7 \times 5^3}{2}$.

E4 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout $N \in [\![2;+\infty[\![$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{2^n}$ est convergente et :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

E5 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{3^n}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2}{3^n}&=\sum_{n=0}^{N}\frac{n(n-1)+n}{3^n}\\&=\frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{N}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

♥ Astuce du chef ♥

$n^2=n(n-1)+n$: utile pour les séries géométriques dérivées seconde

Or $\frac{1}{3}\in]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geqslant 0}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ sont convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{3^n}$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}&=\frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{3^2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\\&=\frac{1}{3^2}\frac{2\times 3^3}{2^3}+\frac{1}{3}\frac{3^2}{2^2}\\&=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{3^n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

E6 Justifions que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et calculons sa somme.

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{n(-1)^n}{n!}&=\sum_{n=1}^{N}\frac{n(-1)^n}{n!}\\&=\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\\&=-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

↙ $k=n-1$

✓ Rigueur !

Il est important de faire commencer la somme à $n=1$ pour diviser par n dans le terme général.

Or la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n!}&=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\\&=-\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n(-1)^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $-\mathrm{e}^{-1}$.