

EXERCICES DU CHAPITRE 8

SÉRIES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 – ●●● - Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente. On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité R_n est bien définie et donner une relation entre S_n , S et R_n .
- Que dire du comportement de R_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 – ●●●

- 1.a. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

- 1.b. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

- 2.a. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}[2; +\infty[$:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

- 2.b. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$.

EXERCICE 3 – ●●● - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes.

- $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{5^n}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^{n-1}}{n!}$
- $\sum_{n \geq 2} \frac{2^{n+1}}{n!}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(-2)^n}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)2^n}{5^{n-1}}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{4^n}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n}}$
- $\sum_{n \geq 0} q^{2n}$, où $q \in]-1; 1[$
- $\sum_{n \geq m} q^n$, où $q \in]-1; 1[$ et $m \in \mathbb{N}$

EXERCICE 4 – ●●● - Convergence & somme (bis)

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

- $\sum_{n \geq 0} \frac{n2^n}{n!}$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n}}$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 1}{5^n}$
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!}$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 2^n}{n!}$
9. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$
10. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!}$
11. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{(n+1)!}$

EXERCICE 5 - ●●●

On admet que les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont convergentes. On admet également que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 6 - ●●● - Suite récurrente et série

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un réel strictement positif a et un entier naturel n puis renvoyant la liste composée des valeurs $u_0, u_1, \dots, u_n$ dans le cas où $u_0 = a$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n .
6. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

EXERCICE 7 - ●●● - Suite récurrente et série (bis)

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2) \end{cases}$.

1. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
2. **2.a.** Démontrer : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
2.b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.
2.c. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $u_n \leq (\ln(2))^n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. **4.a.** Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Déduire de la question 2.c. : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq u_0 + \frac{\ln(2)}{1 - \ln(2)}$.

- 4.b. Conclure finalement que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Remarque

Si le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs a été vu, ne pas tenir compte de la question 4.a. et faire directement la question 4.b..

EXERCICE 8 - ●●● - TSSA (critère de Leibniz)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante et qui converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente. On note S sa somme.

4. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_n - S| \leq u_{n+1}$$

5. **Application.**

Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente puis écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoie une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à $\pm p$ près.