



9

PROBABILITÉS

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

INTRODUCTION...

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble discret (essentiellement à valeurs dans $\mathbb{N}$ même). Or, de façon générale (au programme d'ECG du moins), les variables aléatoires sont à valeurs réelles.

Dans ce chapitre, nous étudierons un certain type de variables aléatoires qui ne sont pas discrètes : les variables aléatoires à densité.

Attention, comme nous le verrons, il existe des variables aléatoires réelles qui ne sont ni discrètes ni à densité. Leur étude n'est pas au programme, même si quelques connaissances sont à avoir...

Sans doute que la plus célèbre des lois à densité est la *loi normale*. Nous l'étudierons dans le chapitre 13 et elle sera également à l'honneur dans les chapitres 15 et 17.

Les premières variables aléatoires non discrètes ont été étudiées au XVIII^{ème} siècle, même si le formalisme n'est absolument pas celui étudié depuis. Sans rentrer dans la théorie de la mesure, nous étudierons les premiers aspects des variables aléatoires à densité qui ont ancré davantage encore le lien entre l'analyse et les probabilités, offrant peut-être à ces dernières une place à part entière dans le paysage mathématique actuel.

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur Ω . Définition et propriétés de la fonction de répartition de X .

- **Définition.** La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$.
- **Propriétés.**
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
 - * F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - * $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
 - * Pour tout $x \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite en x et admet une limite finie à gauche en x .
 - * La fonction de répartition caractérise la loi.

2. Une variable aléatoire est discrète si, et seulement si, sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3. Théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire discrète.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente et dans ce cas

$\mathbb{E}(g(X))$ est la somme de cette série.

4. Intégrales impropres usuelles :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ est convergente si, et seulement si, $a > 1$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ est convergente si, et seulement si, $a < 1$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ est convergente si, et seulement si, $a > 0$.

5. Critères sur les intégrales impropres :

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; +\infty[$.

- Par inégalité :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a; +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a; +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ est divergente} \right)$$

- Par négligeabilité :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(g(t)) \\ \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(g(t)) \\ \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ est divergente} \right)$$

- Par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ ont même nature} \right)$$

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace. On notera F_X la fonction de répartition de X .

I DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

I.1 VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ

DÉFINITION 1

VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ

On dit qu'une variable aléatoire **est à densité** lorsque sa fonction de répartition est :

- ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On sait déjà que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$... Et réciproquement :

THÉORÈME 1

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si F est :

- ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
- ✓ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- ✓ croissante sur $\mathbb{R}$,
- ✓ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire à densité dont F est la fonction de répartition.

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

★

EXEMPLES 1

E1 Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$; elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

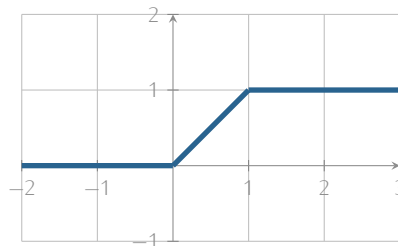
Conclusion : les variables aléatoires discrètes ne sont pas à densité.

Rappel...

La réciproque est vraie : si F_X est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors X est discrète.

E2 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Représentons F_X et montrons que la variable aléatoire X est à densité.



✓ Continuité ?

- * Sur $]-\infty; 0[$: F_X est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- * Sur $]0; 1[$: F_X est continue sur $]0; 1[$ car affine sur cet intervalle.
- * Sur $]1; +\infty[$: F_X est continue sur $]1; +\infty[$ car constante sur cet intervalle.
- * En 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_X(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_X(x) = 0 ; \quad F_X(0) = 0$$

Donc F_X est continue en 0.

- * En 1 : de la même façon, F_X est continue en 1.

Conclusion : F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$** ? Par des arguments similaires à la continuité, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Conclusion : la variable aléatoire X est à densité.

♣ Méthode !

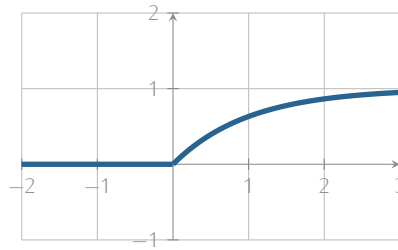
On sait déjà que F_X est une fonction de répartition... Il suffit donc de vérifier la définition 1.

Remarque

En fait, F_X est continue sur $[0; 1]$; autrement dit, F_X est continue en 0 à droite et en 1 à gauche; mais on préfère travailler sur les intervalles ouverts pour une raison qui suivra bientôt...

E3 Considérons la fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Représentons F puis démontrons qu'elle est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.



✓ Continuité ?

- * Sur $] -\infty; 0[$: F est continue sur $] -\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- * Sur $]0; +\infty[$: F est continue sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles continues sur cet intervalle.
- * En 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = 0 ; \quad F(0) = 0$$

Donc F est continue en 0.

Conclusion : F est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ Caractère $\mathcal{C}^1$? Par des arguments similaires à la continuité, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

✓ Croissance ?

- * Sur $] -\infty; 0[$: F est croissante sur $] -\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- * Sur $]0; +\infty[$: $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque F est continue en 0, on en déduit que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

✓ Limites ?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$$

Conclusion : F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

E4 On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \max(1, X)$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leq 1 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 1 \end{cases}$$

Montrons que Y n'est ni discrète ni à densité.

- Déterminons la fonction de répartition de Y , notée F_Y .

- * Par définition de Y , on a déjà :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) \geq 1$$

D'où :

$$Y(\Omega) \subset [1; +\infty[$$

- * Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow x < 1 \text{ et } Y(\Omega) \subset [1; +\infty[, \text{ donc } [Y \leq x] = \emptyset$$

× Si $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([\max(1, X) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([1 \leq x] \cap [X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= F_X(x) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\leftarrow x \geq 1, \text{ donc } [1 \leq x] = \Omega \\ &\leftarrow x \geq 1, \text{ donc } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Et F_Y n'est pas constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc la variable aléatoire Y n'est pas discrète.
- Remarquons alors que F_Y n'est pas continue en 1, donc la variable aléatoire Y n'est pas à densité.

Conclusion : la variable aléatoire Y n'est ni discrète ni à densité.

♣ Méthode !

Ici, on ne sait pas que F est une fonction de répartition ; on met donc en place le théorème 1.

♥ Astuce du chef ♥

On commence par la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ qui peuvent être utiles pour l'examen de la croissance...

Important !

L'argument de continuité en 0 est indispensable pour assurer la croissance sur $\mathbb{R}$ en 'recolant' les deux morceaux... Il faut avoir un exemple (graphique ou algébrique) d'une fonction g non continue en 0, croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ sans être croissante sur $\mathbb{R}$.

Confusion d'objets !

Le '1' de $\max(1, X)$ désigne une variable aléatoire constante égale à 1, pas le réel 1...

ℝ Rappel...

$$\forall a, b, x \in \mathbb{R}, \max(a, b) \leq x \iff \begin{cases} a \leq x \\ b \leq x \end{cases}$$

À retenir...

La fonction de répartition d'une variable aléatoire Z est nulle 'avant $Z(\Omega)$ ' et égale à 1 'après' $Z(\Omega)$.

DÉFINITION 2

DENSITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soient X une variable aléatoire à densité et F_X sa fonction de répartition.
Une **densité de X** est une fonction f_X , définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

- ✓ $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$,
- ✓ en tout réel x en lequel F_X est $\mathcal{C}^1$, $f_X(x) = F'_X(x)$.

✗ Attention !

- Puisque F_X n'est pas nécessairement $\mathcal{C}^1$ partout, ces deux items ne définissent pas toujours une unique fonction. Par conséquent, on parlera d'une densité.
- f_X ne sera pas continue là où F_X n'est pas $\mathcal{C}^1$.
- Si F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il n'y a qu'une seule densité : F'_X , qui est alors continue sur $\mathbb{R}$.

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour montrer que X est à densité et en donner une densité :

- on montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- on obtient une densité de X en :
 - * dérivant F_X en tout point en lequel elle est $\mathcal{C}^1$ (on dérive donc sur les intervalles ouverts),
 - * donnant une valeur arbitraire positive éventuellement ailleurs.

📖 Pour info...

Donner la loi d'une variable aléatoire à densité c'est en donner une densité.

EXEMPLE 2

Reprenons la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On sait déjà (Exemples 1 - E2) que la variable aléatoire X est à densité. Donnons-en une densité.
Notons f_X une densité de X .

- On a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f_X(x) = F'_X(x) = 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, f_X(x) = F'_X(x) = 1$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f_X(x) = F'_X(x) = 0$$

- et on pose :

$$f_X(0) = 1 \quad ; \quad f_X(1) = 1$$

Conclusion : la fonction $f_X : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de X .

Remarque

En pratique, on ne prend pas des valeurs complètement arbitraires... On pourrait faire preuve d'originalité, mais on ne le fait pas ! On a pour habitude de prolonger par continuité (quand c'est possible) sur un des intervalles.

Remarque

Sont également des densités de X les fonctions :
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$...

On sait déjà comment, à partir de la fonction de répartition, obtenir une densité. Réciproquement :

THÉORÈME 2

LIEN DENSITÉ / FONCTION DE RÉPARTITION

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X .
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

* DÉMONSTRATION : Théorème admis.

*

★ Subtil... ★

Puisque f_X n'est pas nécessairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (même si ce sera généralement le cas), cette intégrale peut en fait être impropre en des points intermédiaires entre $-\infty$ et x ...

On peut trouver une densité à partir de la fonction de répartition ; et réciproquement... Or, donner une densité de X , c'est en donner la loi...
Par conséquent, on retrouve le résultat suivant, très utile sur les variables aléatoires à densité : **la fonction de répartition caractérise la loi.**

Finalement, si f_X est une densité de X , on a :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$,
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (en lesquels F_X n'est pas $\mathcal{C}^1$),
- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$.

Réciproquement :

Remarque

Si f_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors F_X sera $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si :

- ✓ f est positive sur $\mathbb{R}$,
- ✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- ✓ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1,

alors il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire dont f est une densité.

Remarque

On a vu un résultat analogue dans le cas des VA discrètes...

Vocabulaire

On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

EXEMPLES 3

E1 Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est une densité de probabilité.

✓ Positivité ? On a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

✓ Continuité ? La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\exp$ et $|\cdot|$ le sont.

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

$$* \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 ?$$

Soit $B \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B f(x)dx &= \int_0^B \frac{1}{2}e^{-|x|}dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^B e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}[-e^{-x}]_0^B \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-B} + 1) \end{aligned} \quad \leftarrow B \geq 0, \text{ donc } \forall x \in [0; B], |x| = x$$

$$\text{Or } \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(-e^{-B} + 1) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

$$* \int_{-\infty}^0 f(x)dx ?$$

Par parité de f , on en déduit que $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ est aussi convergente et $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et par relation de Chasles : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

E2 Montrons que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité et

déterminons la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f .

• ✓ Positivité ? On a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

✓ Continuité ?

- × Sur $] -\infty; -1[$: la fonction f est continue sur $] -\infty; -1[$ comme inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur cet intervalle.
- × Sur $[1; +\infty[$: de même, f est continue sur $[1; +\infty[$.
- × Sur $] -1; 1[$: f est continue sur $] -1; 1[$ car constante sur cet intervalle.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1 .

$$✓ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 ?$$

$$\times \int_{-1}^1 f(x)dx ?$$

Puisque f est nulle sur $] -1; 1[$, l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x)dx$ est convergente et vaut 0.

♥ Conseil du chef ♥

On travaille sur les intervalles ouverts, même s'il est vrai que f est continue sur $] -\infty; -1[$: elle est continue en -1 à gauche (pas en -1 à droite en revanche).

$$\times \int_1^{+\infty} f(x) dx ?$$

Soit $B \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^B f(x) dx &= \int_1^B \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x} \right]_1^B \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{B} + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$.

$$\times \int_{-\infty}^1 f(x) dx ?$$

Par parité de f , l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ est aussi convergente et $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et par relation de Chasles : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .

- Notons F_X la fonction de répartition de X .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \end{aligned} \quad \leftarrow X \text{ est à densité, de densité } f$$

* Si $x \leq -1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{2t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{t} \right]_{t \rightarrow -\infty}^x \\ &= \frac{-1}{2x} \end{aligned}$$

* Si $x \in]-1; 1[$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x 0 dt \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \leftarrow x \in]-1; 1[\\ \leftarrow \text{calcul fait précédemment} \end{array}$$

* Si $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2x} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{calculs précédents, car } x \geq 1 \\ \leftarrow \text{calcul fait précédemment} \end{array}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Là où f_X est nulle, F_X est constante ; et réciproquement.

♥ Astuce du chef ♥

Pour calculer cette intégrale, on distingue les valeurs de x comme c'est le cas dans l'expression de la densité de X fournie.

✍ Rédaction

La convergence de l'intégrale calculée est déjà assurée; on peut donc s'autoriser la notation $\left[\frac{-1}{t} \right]_{t \rightarrow -\infty}^x$ pour épurer la rédaction.

Vérification

Puisque F_X est une fonction de répartition, on vérifie rapidement que :

- F_X est positive;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X = 1$;

et puisque X est à densité, on vérifie également :

- F est continue sur $\mathbb{R}$.

Bien évidemment, on pourrait vérifier que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et que, là où c'est possible, $F'_X(x) = f_X(x)$... Mais les vérifications précédentes garantissent le bon résultat !

PROPRIÉTÉS 1

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X .

P1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = 0$$

P2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X < x]) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X > x]) &= \mathbb{P}([X \geq x]) \\ &= 1 - F_X(x) \\ &= \int_x^{+\infty} f_X(t) dt\end{aligned}$$

P3 Pour tous réels a, b tels que $a \leq b$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f_X(t) dt\end{aligned}$$

Pour info...

On voit bien que la loi d'une VA à densité ne peut donc pas être la donnée de $\mathbb{P}([X = x])$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme pour les VA discrètes...

Remarque

Puisque f_X est positive, $\int_a^b f_X(t) dt$ est l'aire sous la courbe de f_X .

★

DÉMONSTRATION :

P1. Soit $x \in \mathbb{R}$. De façon générale, on sait que $\mathbb{P}([X = x])$ est égale à la hauteur du saut de continuité de F_X en x . Or, X est à densité, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en x . Par conséquent : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$.

P2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq x]) &= \mathbb{P}([X = x] \cup [X < x]) \\ &= \mathbb{P}([X = x]) + \mathbb{P}([X < x]) \\ &= \mathbb{P}([X < x])\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} [X = x] \text{ et } [X < x] \text{ sont incompatibles} \\ \text{P1} \end{array} \right\}$

Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq x]) &= F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{théorème 2} \end{array} \right\}$

• On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \geq x]) &= \mathbb{P}([X = x] \cup [X > x]) \\ &= \mathbb{P}([X = x]) + \mathbb{P}([X > x]) \\ &= \mathbb{P}([X > x]) \\ &= \mathbb{P}(\overline{[X \leq x]}) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= 1 - F_X(x) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt - \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt + \int_x^{+\infty} f_X(t) dt \\ &= \int_x^{+\infty} f_X(t) dt\end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} [X = x] \text{ et } [X > x] \text{ sont incompatibles} \\ \text{P1} \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{théorème 2} \\ f_X \text{ est une densité de probabilité} \end{array} \right\}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{relation de Chasles} \end{array} \right\}$

Pour info...

En fait : $\mathbb{P}([X = x]) = F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t)$ (et $\lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$). Ce résultat pourrait être démontré avec le théorème de limite monotone sur les probabilités, qui n'est plus au programme...

P3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. De la même façon que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b])\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq b]) &= \mathbb{P}([X < a] \cup [a \leq X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([X < a]) + \mathbb{P}([a \leq X \leq b])\end{aligned}$$

↪ $[X < a]$ et $[a \leq X \leq b]$ sont incompatibles

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) &= \mathbb{P}([X \leq b]) - \mathbb{P}([X < a]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq b]) - \mathbb{P}([X \leq a]) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t) dt - \int_{-\infty}^a f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^b f_X(t) dt + \int_a^{-\infty} f_X(t) dt \\ &= \int_a^b f_X(t) dt\end{aligned}$$

↪ P2

↪ relation de Chasles

★

EXEMPLE 4

Reprenons la variable aléatoire introduite dans Exemples 3 - E2.

Déterminons :

$$\mathbb{P}([X \leq 3]) ; \mathbb{P}([X \geq 2]) ; \mathbb{P}_{[X \geq 2]}([X \leq 3])$$

- On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leq 3]) &= F_X(3) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

- Et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \geq 2]) &= 1 - \mathbb{P}([X < 2]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X \leq 2]) \\ &= 1 - F_X(2) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

↪ X est à densité

- Puisque $\mathbb{P}([X \geq 2]) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X \geq 2]}([X \leq 3]) &= \frac{\mathbb{P}([X \geq 2] \cap [X \leq 3])}{\mathbb{P}([X \geq 2])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([2 \leq X \leq 3])}{\mathbb{P}([X \geq 2])} \\ &= \frac{F_X(3) - F_X(2)}{\mathbb{P}([X \geq 2])} \\ &= \frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

↪ X est à densité

II TRANSFORMATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Considérons une variable aléatoire X à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X . Pour toute fonction g définie et **continue** sur $X(\Omega)$, on peut définir la variable aléatoire $Y = g(X)$.

Traisons quelques cas classiques...

✗ Attention !

$g(X)$ n'est pas forcément à densité : voir Exemples 1 - E4. En revanche, la continuité de g assure que c'est bien une VA (dans le cas discret, la continuité n'était pas nécessaire pour que $g(X)$ soit une VA).

♣ **MÉTHODE 2** ♣ Pour déterminer si la variable aléatoire $Y = g(X)$ est à densité et, le cas échéant, en donner une densité :

- on commence par réfléchir à $Y(\Omega)$ (une inclusion suffit, mais on a parfois une égalité...),
- on détermine la fonction de répartition de Y (on veille à bien justifier les égalités d'événements en jeu...),
- on regarde si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- si c'est le cas, alors on donne une densité en dérivant F_Y là où elle est $\mathcal{C}^1$ et en donnant des valeurs "arbitraires positives" ailleurs (**attention à la dérivée d'une composée...**).

ℳ Rappel...

Quand cela a du sens :

$$(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$$

♥ Astuce du chef ♥

Quand l'énoncé donnera une densité f_X de X , on prendra souvent comme $X(\Omega)$ l'ensemble sur lequel f n'est pas nulle ou bien "le plus petit" ensemble E tel que $\int_E f_X(t) dt = 1$...

EXEMPLES 5

Dans tous ces exemples, on considère une variable aléatoire X de densité f_X , continue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F_X . On considère également que $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

E1 Montrons que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité et donnons-en une densité.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a déjà $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Notons F_Y la fonction de répartition de Y .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \swarrow x < 0 \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ donc } [Y \leq x] = \emptyset$$

* Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([|X| \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow x \geq 0 \\ \searrow X \text{ est à densité} \end{array}$$

ℳ Rappel...

$\forall y \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ :$

$$|y| \leq a \iff -a \leq y \leq a$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x) - F_X(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ensuite :

✓ **Continuité.**

- × Sur $] -\infty; 0[$: F_Y est continue sur $] -\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.
- × Sur $] 0; +\infty[$: puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$; donc $x \mapsto F_X(-x)$ également. Donc F_Y est continue sur $] 0; +\infty[$.
- × En 0 :

d'une part

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0$$

d'autre part, par composition et puisque F_X est continue en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$$

Dès lors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_Y(x) = F_Y(0)$$

Par conséquent, F_Y est continue en 0.

Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité et comme F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité et que f_X est supposée continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Par conséquent, Y est une variable aléatoire à densité et en notant f_Y une de ses densités :

* pour tout $x \in]-\infty; 0[$:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = 0$$

et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) \\ &= F'_X(x) - (-F'_X(-x)) \\ &= f_X(x) + f_X(-x) \end{aligned}$$

* on pose $f_Y(0) = 0$.

Remarque

Une autre valeur naturelle aurait été $2f_X(0)$...

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \mapsto \begin{cases} f_X(x) + f_X(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

E2 Montrons que la variable aléatoire $Y = \exp(X)$ est à densité et donnons-en une densité.

• On a déjà :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (\exp(X))(\Omega) \\ &= \exp(X(\Omega)) \\ &= \exp(\mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R}^{++} \end{aligned}$$

• Notons F_Y la fonction de répartition de Y .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow x \leq 0 \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{R}^{++}, \text{ donc } [Y \leq x] = \emptyset$$

* Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\exp(X) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq \ln(x)]) \\ &= F_X(\ln(x)) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{++}$$

Important !

La **stricte** croissance de $\ln$ est nécessaire ! En effet, l'égalité des probabilités provient ici de l'égalité des événements $[\exp(X) \leq x]$ et $[X \leq \ln(x)]$.
Or, pour s'assurer de cette égalité, il faut que pour tout $\omega \in \Omega$, les assertions $\exp(X(\omega)) \leq x$ et $X(\omega) \leq \ln(x)$ soient équivalentes...
Ce qui est garanti par la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$ (ou de $\exp$ sur $\mathbb{R}$).

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} F_X(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Ensuite :

✓ Continuité.

× Sur $] -\infty; 0[$: F_Y est continue sur $] -\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle.

× Sur $]0; +\infty[$:

- $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc F_Y est continue sur $]0; +\infty[$.

× En 0 :

d'une part

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0$$

d'autre part :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$;
- $\lim_{A \rightarrow -\infty} F_X(A) = 0$, car F_X est une fonction de répartition.

Donc par composition :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = 0$$

Dès lors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_Y(x) = F_Y(0)$$

Par conséquent, F_Y est continue en 0.

Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$.** Par des arguments similaires à la continuité et comme F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité et que f_X est supposée continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Par conséquent, Y est une variable aléatoire à densité et en notant f_Y une de ses densités :

- * pour tout $x \in]-\infty; 0[$:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = 0$$

et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) \\ &= \frac{1}{x} F'_X(\ln(x)) \\ &= \frac{1}{x} f_X(\ln(x)) \end{aligned}$$

- * on pose $f_Y(0) = 0$.

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} f_X(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

E3 Montrons que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et donnons-en un densité.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et que $a \neq 0$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.
- Notons F_Y la fonction de répartition de Y .
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([aX + b \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([aX \leq x - b]) \end{aligned}$$

Distinguons alors deux cas :

- * Si $a > 0$:
On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

- * Si $a < 0$:
On a alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\left[X \geq \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

↖ X est à densité

- Or, la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est une fonction affine, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

- ✓ **Continuité.** Puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$.** Puisque X est à densité et que X est supposée continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; donc $x \mapsto F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, F_Y est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la variable aléatoire Y est à densité et en notant f_Y une densité de Y , on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- * si $a > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) \\ &= \frac{1}{a} F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Pourquoi ?

L'image de $\mathbb{R}$ par une fonction affine non constante est $\mathbb{R}$!

Remarque

En pratique, F_X ne sera peut-être pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier... Mais cela ne changera pas grand chose !

* si $a > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= -F'_Y(x) \\ &= -\frac{1}{a} F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Attention !
Dérivée d'une composée !

Dans les deux cas :

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

E4 Dans le cas $Y = X^2$: QUESTION CLASSIQUE 36.

III MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ

III.1 ESPÉRANCE

DÉFINITION 3

ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X .

On dit que la variable aléatoire X admet **une espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_{X(\Omega)} t f_X(t) dt$$

Remarque

On ne peut que voir l'analogie avec les variables aléatoires discrètes... N'est-ce pas ?!

EXEMPLES 6

E1 Considérons une variable aléatoire X de densité la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(Exemples 3 - E2). Justifions que X ne possède pas d'espérance.

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx$ est convergente

si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} |x f(x)| dx$ et $\int_1^{+\infty} |x f(x)| dx$ sont convergentes car f est nulle sur $] -1; 1[$

si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} -x f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} x f(x) dx$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} \frac{-1}{2x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ sont convergentes

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est divergente. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ est également divergente.

Conclusion : X n'admet pas d'espérance.

E2 Soit X une variable aléatoire de densité f . On suppose que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire, et qu'il existe un réel $a > 2$ tel que $f(t) = \frac{1}{t^a}$. Démontrer que X possède une espérance et la calculer.

•

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ est convergente

si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^0 |t f(t)| dt$ et $\int_0^{+\infty} |t f(t)| dt$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^0 -t f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ sont convergentes

- * Pour $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

× La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

× ✓ On sait que $f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^a} \right)$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{a-1}} \right)$$

✓ $\forall t \in [1; +\infty[$, $tf(t) \geq 0$; $\frac{1}{t^{a-1}} \geq 0$

✓ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente, car $a-1 > 1$ ($a > 2$).

Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

Par conséquent : l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

- * Pour $\int_{-\infty}^0 tf(t)dt$.

On sait que :

✓ la fonction f est paire, donc la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire,

✓ l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

Par conséquent : l'intégrale $\int_{-\infty}^0 tf(t)dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 tf(t)dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.

On retrouve les propriétés habituelles sur l'espérance (linéarité, croissance) qui sont rappelées en fin de chapitre. Et, comme pour les variables aléatoires discrètes, on peut déterminer l'espérance de $g(X)$ en connaissant seulement une densité de X , sans connaître une densité de $g(X)$...

THÉORÈME 4

DE TRANSFERT

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X nulle en dehors de $X(\Omega)$ ainsi que g une fonction continue sur $X(\Omega)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$$

En gros...

Si f est nulle en dehors d'un intervalle $]a; b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), alors $g(X)$ admet une espérance ssi $\int_a^b g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant : $\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t)f_X(t)dt$.

Important !

Cas particulier important. Sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt$$

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

★

DÉFINITION 4

MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance. Dans ce cas, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$.

Remarque

Le moment d'ordre 1 est l'espérance...
Le moment d'ordre 2 nous intéressera particulièrement... et on le calculera à l'aide du théorème de transfert !

On retrouve l'analogie avec le cas discret :

PROPRIÉTÉ 2

(HP ?)

Soit $r \in \mathbb{N}$. Si $X(\Omega)$ est borné, alors X admet un moment à tout ordre.

★ DÉMONSTRATION : Supposons que $X(\Omega)$ est borné. Il existe alors un réel positif a , que nous considérons ensuite, tels que :

$$\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq a$$

On peut alors considérer une densité f_X de X qui est nulle en dehors de $[-a; a]$.

- Dans ce cas, par théorème de transfert, licite car $\cdot^r$ est continue sur $X(\Omega)$:

X^r admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f_X(t)| dt$ est convergente

si, et seulement si, $\int_{-a}^a |t^r f_X(t)| dt$ est convergente,
car f est nulle en dehors de $[-a; a]$

- Or :

✓ pour tout $t \in [-a; a]$:

$$0 \leq |t| \leq a$$

D'où, par croissance de la fonction $\cdot^r$ sur $\mathbb{R}^+$ (car r est positif) :

$$\forall t \in [-a; a], |t|^r \leq a^r$$

On a ainsi, par positivité de f_X :

$$\forall t \in [-a; a], 0 \leq |t^r f_X(t)| \leq a^r f_X(t)$$

✓ $\int_{-a}^a f_X(t) dt$ est convergente (car f_X est une densité de probabilité); donc $\int_{-a}^a a^r f_X(t) dt$ est également convergente.

Donc par critère de comparaison (par inégalité) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_{-a}^a |t^r f_X(t)| dt$ est convergente.

Conclusion : X^r admet une espérance; autrement dit, X admet un moment d'ordre r .

★

THÉORÈME 5

(HP ?)

Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X ainsi que $r \in \mathbb{N}^*$.
Si X admet un moment d'ordre r , alors X admet un moment de tout ordre inférieur ou égal à r .

★ DÉMONSTRATION : Supposons que X admet un moment d'ordre r .
Soit $q \in \llbracket 1; r \rrbracket$. D'après le théorème de transfert, licite car la fonction $\cdot^q$ est continue sur $X(\Omega)$ (elle l'est sur $\mathbb{R}$) :

X^q admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^q f_X(t)| dt$ est convergente

si, et seulement si, $\int_{-\infty}^0 |t^q f_X(t)| dt$ et $\int_0^{+\infty} |t^q f_X(t)| dt$ sont convergentes

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Si $|t| \leq 1$:

Alors, par croissance de la fonction $\cdot^q$ sur $\mathbb{R}^+$ (car $q \geq 0$), on a :

$$|t|^q \leq 1$$

- Si $|t| > 1$:

On a :

$$q \leq r$$

D'où, en multipliant par $\ln(|t|) > 0$ (car $|t| > 1$) :

$$q \ln(|t|) \leq r \ln(|t|)$$

♣ L'idée !

On suppose la CV de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f_X(t)| dt$ pour établir la CV de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^q f_X(t)| dt$... en utilisant le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive.

Et, par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\exp(q \ln(|t|)) \leq \exp(r \ln(|t|))$$

Autrement dit :

$$|t|^q \leq |t|^r$$

Dans les deux cas, on obtient :

$$|t|^q \leq 1 + |t|^r$$

Or, $f_X(t) \geq 0$, d'où :

$$|t|^q f_X(t) \leq f_X(t) + |t|^r f_X(t)$$

On a ainsi :

$$\checkmark \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq |t|^q f_X(t) \leq f_X(t) + |t|^r f_X(t).$$

✓ Mais :

* l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est une intégrale convergente (égale à 1, car f_X est une densité de probabilité), donc les intégrales $\int_{-\infty}^0 f_X(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f_X(t) dt$ sont convergentes ;

* l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f_X(t)| dt$ est une intégrale convergente (car X admet un moment d'ordre r ...), donc les intégrales $\int_{-\infty}^0 |t^r f_X(t)| dt$ et $\int_0^{+\infty} |t^r f_X(t)| dt$ sont convergentes.

Par conséquent : les intégrales $\int_{-\infty}^0 (f_X(t) + |t^r f_X(t)|) dt$ et $\int_0^{+\infty} (f_X(t) + |t^r f_X(t)|) dt$ sont convergentes.

Ainsi, en appliquant deux fois le critère de comparaison sur les intégrales impropres à intégrande positive, les intégrales $\int_{-\infty}^0 |t^q f_X(t)| dt$ et $\int_0^{+\infty} |t^q f_X(t)| dt$ sont convergentes. D'où l'existence du moment d'ordre q de X .

★

DÉFINITIONS 5

VARIANCE & ÉCART-TYPE

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

D1 On dit que la variable aléatoire X admet une **variance** lorsque $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance.

Dans ce cas, on note $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ (qui est donc un nombre positif).

D2 Si X admet une variance, alors on note $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$: c'est l'**écart-type** de X .

Pour info...

Puisque $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$, les cas où X n'admet pas de variance sont les cas où cette variance est *infinie* : les valeurs de X qui ont un poids important sont trop étalées...

À nouveau, la petite formule qui fait plaisir pour le calcul de la variance :

THÉORÈME 6

FORMULE DE KOENIG-HUYGENS

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.

X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2 ; et dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Remarque

D'après les théorèmes 2 et 3 : si X admet une variance, alors elle admet une espérance (heureusement, vue la formule de KH). La réciproque est utile : si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.

★ DÉMONSTRATION : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance. Raisonnons par double implication pour démontrer l'équivalence, mais commençons déjà par développer $(X - \mathbb{E}(X))^2$:

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Ensuite...

⇒ Supposons que X admette une variance. D'après l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$X^2 = (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Mais X admet une variance, donc $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance ; tout comme X et $\mathbb{E}(X)^2$ (qui est une variable aléatoire constante).

Donc X^2 est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance.

Autrement dit, X admet un moment d'ordre 2.

⇐ Supposons que X admette un moment d'ordre 2.

On avait :

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Mais comme X admet un moment d'ordre 2, X^2 admet une espérance ; ce qui est également le cas de X et $\mathbb{E}(X)$.

Donc $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance : par conséquent, elle admet également une espérance. Autrement dit, X admet une variance.

Et, si X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

↙ linéarité de l'espérance

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour étudier l'existence et, le cas échéant, calculer une variance :

on regarde si X admet un moment d'ordre 2 (avec le théorème de transfert), puis deux cas :

- si non, alors X n'a pas de variance ;
- si oui, alors on calcule $\mathbb{E}(X^2)$, puis on calcule $\mathbb{V}(X)$ avec la formule de Koenig-Huygens.

★

Important !

Parfois, l'énoncé fait calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ puis demander d'en déduire $\mathbb{V}(X)$... Il suffit de remarquer que : $\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, pour ensuite avoir $\mathbb{E}(X^2)$ et enfin $\mathbb{V}(X)$.

Là encore, les propriétés habituelles sur la variance sont encore valables et sont rappelées en fin de chapitre.

III.3 VARIABLE ALÉATOIRE CENTRÉE, RÉDUITE, CENTRÉE & RÉDUITE.

DÉFINITIONS 6

VA CENTRÉE / RÉDUITE

D1 Si X admet une espérance, on dit que X est **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

D2 Si X admet une variance, on dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = 1$.

PROPRIÉTÉ 3

Si X admet une espérance et une variance et si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors :

- la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée ;
- la variable aléatoire $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Notation

Si $\sigma(X) \neq 0$, on note parfois $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à X .

★ DÉMONSTRATION : Les propriétés sur l'espérance et la variance permettent de démontrer sans effort ces deux résultats...

★

IV INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

DÉFINITIONS 7

INDÉPENDANCE DE VA

D1 Soient X et Y deux variables aléatoires à densité. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall I, J \subset \mathbb{R}, \mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$

D2 Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à densité. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}, \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \in I_k] \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k \in I_k])$$

D3 Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité. On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Et le fameux :

PROPRIÉTÉ 4

LEMME DES COALITIONS

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $(X_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une suite de n variables aléatoires à densité. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

★

♣ MÉTHODE 4 ♣ Deux méthodes classiques...

1. Pour la loi de $Z = \min(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z > z]) &= \mathbb{P}([\min(X, Y) > z]) \\ &= \mathbb{P}([X > z] \cap [Y > z]) \\ &= \mathbb{P}([X > z]) \times \mathbb{P}([Y > z]) \quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= (1 - \mathbb{P}([X \leq z]))(1 - \mathbb{P}([Y \leq z])) \\ &= (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))\end{aligned}$$

Puis on donne $\mathbb{P}([Z \leq z])...$

2. Pour la loi de $Z = \max(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z \leq z]) &= \mathbb{P}([\max(X, Y) \leq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq z] \cap [Y \leq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq z]) \times \mathbb{P}([Y \leq z]) \quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= F_X(z)F_Y(z)\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on regarde ensuite si Z est à densité et, le cas échéant, on en donne une densité.

→ Réflexe !

Pour tous réels x, y, z :

$$\min(x, y) > z \iff \begin{cases} x > z \\ y > z \end{cases}$$

$$\max(x, y) \leq z \iff \begin{cases} x \leq z \\ y \leq z \end{cases}$$

Remarque

Méthodes identiques pour $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Le travail sur la somme de variables aléatoires à densité indépendantes n'est pas au programme en mathématiques appliquées, mais il arrive régulièrement que l'énoncé fournisse les résultats nécessaires à une telle étude.

EXEMPLE 7

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité indépendantes telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la

fonction de répartition de X_k est $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Exprimons la fonction de répartition de M_n en fonction de F puis montrons que M_n est une variable aléatoire à densité et donnons-en une densité.

- Notons F_n la fonction de répartition de M_n .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \mathbb{P}([M_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) \quad X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k \leq x]) \quad X_1, \dots, X_n \text{ ont toutes la même fonction de répartition} \\ &= F(x)^n\end{aligned}$$

- Ensuite :

✓ **Continuité.** Puisque F est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(x)^n$ également.

Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$.** Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1, la fonction F_n est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Par conséquent, la variable aléatoire M_n est à densité et en notant f_n une de ses densités :

* pour tout $x < 0$:

$$f_n(x) = F'_n(x) = 0$$

pour tout $x \in]0; 1[$:

$$f_n(x) = F'_n(x) = nx^{n-1}$$

pour tout $x > 1$:

$$f_n(x) = F'_n(x) = 0$$

* on pose $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$

♥ Astuce du chef ♥

Quand on demande d'exprimer une fonction de répartition d'une variable aléatoire $g(X)$ en fonction de celle de X , il est rarement utile de procéder par disjonction de cas sur les valeurs de $x...$

Conclusion : M_n est à densité et admet pour densité la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

V COMPARATIF VA DISCRÈTES / VA À DENSITÉ

	VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ
Donnée de la loi de probabilité	$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et on donne la <i>fonction de masse</i> : • $\mathbb{P}([X = n])$ pour tout $n \in X(\Omega)$ • $\mathbb{P}([X = n]) = 0$ pour tout n en dehors de $X(\Omega)$ • On a : $\sum_{n \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = n]) = 1$	$X(\Omega)$ est un intervalle (ou union d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et on donne une <i>fonction de densité</i> : • f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • f_X est positive sur $\mathbb{R}$ (peut être choisie nulle en dehors de $X(\Omega)$) • $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et vaut 1
Calculs de probabilités	$\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ a \leq n \leq b}} \mathbb{P}([X = n]) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$ $\mathbb{P}([X \leq b]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \leq b}} \mathbb{P}([X = n])$ $\mathbb{P}([X \geq a]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \geq a}} \mathbb{P}([X = n])$	$\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f_X(t)dt = F_X(b) - F_X(a)$ $\mathbb{P}([X \leq b]) = \int_{-\infty}^b f_X(t)dt$ $\mathbb{P}([X \geq a]) = \int_a^{+\infty} f_X(t)dt$ $\mathbb{P}([X = a]) = 0;$ $\mathbb{P}([X < b]) = \mathbb{P}([X \leq b]); \mathbb{P}([X > a]) = \mathbb{P}([X \geq a])$
Propriétés de la fonction de répartition F_X	• F_X est constante par morceaux • F_X est discontinue en chaque $n \in X(\Omega)$ (continue à droite) • le saut de continuité en n est égal à $\mathbb{P}([X = n])$ • $\forall n \in X(\Omega), \mathbb{P}([X \leq n]) - \mathbb{P}([X \leq n-1]) = \mathbb{P}(X = n)$	• F_X continue sur $\mathbb{R}$ • F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • pour tout x où F_X est $\mathcal{C}^1$: $F'_X(x) = f_X(x)$
Indépendance	Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$: $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$	Pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$
Espérance (si existence)	• X a une espérance ssi $\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X = n])$ est convergente • $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X = n])$	• X a une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t) dt$ est convergente • $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$
Théorème de transfert	• $g(X)$ a une espérance ssi $\sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}([X = n])$ est convergente • $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}([X = n])$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X = n])$	Si g est continue sur $X(\Omega)$: • $g(X)$ a une espérance ssi $\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t) dt$ est convergente • $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ et en particulier : $\mathbb{E}(X^2) = \int_{X(\Omega)} t^2f_X(t)dt$
Variance (si existence)	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$	
Formule de Keonig-Huygens	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$	
Propriétés de l'espérance et de la variance	Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. • Linéarité de l'espérance. Si X et Y ont une espérance, alors, $aX + bY$ aussi et : $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. • Croissance de l'espérance. Si X et Y ont une espérance et $\mathbb{P}([X \leq Y]) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. • Si X a une variance, alors $aX + b$ aussi et : $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. • Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY a une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Si $X_1, \dots, X_n$ ont une espérance et sont indépendantes, alors $\prod_{k=1}^n X_k$ a une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$. • Si X et Y ont une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ a une variance et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Si $X_1, \dots, X_n$ ont une variance et sont indépendantes, alors $\sum_{k=1}^n X_k$ a une variance et $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.	

On admet que l'on peut étendre les propriétés sur l'espérance et la variance, vues dans le cas discret (et démontrées dans le chapitre 4) au cas des variables aléatoires à densité. Il nous manque des outils pour les démontrer dans ce cas-ci.

On admet également que l'on peut définir l'indépendance (celle dans le cas à densité), l'espérance et la variance pour des variables aléatoires ni discrètes, ni à densité. Puis on admet ensuite que les propriétés énoncées en fin de tableau sont valables dans ce cas de figure.