

EXERCICES DU CHAPITRE 9

VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●●

Déterminer le réel a de sorte que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité.

EXERCICE 2 - ●●● - Densité et fonction de répartition

Dans chaque cas, démontrer que la fonction f est une densité de probabilité puis déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f comme densité.

$$1. f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1; 0[\\ 1-x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$4. f : x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$$

$$5. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2x^4} & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x \in]-1; 1[\\ \frac{3}{2x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

EXERCICE 3 - ●●●

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité une fonction f paire. On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

- Calculer $F(0)$.
- Établir : $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = 1 - F(x)$. Retrouver alors la valeur de $F(0)$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 4 - ●●● - Ni discrète ni à densité

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$.

- Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition est F . Notons Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminer la fonction de répartition de Y .
- En déduire que Y n'est ni discrète ni à densité.

EXERCICE 5 - ●●●

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X .
- Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X . Construire sa représentation graphique.
- Calculer les probabilités : $\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X \geq \frac{1}{2}]}\left(\left[X \leq \frac{3}{2}\right]\right)$.
- Calculer $\mathbb{E}(1-X)$ puis en déduire l'espérance de X .
- Calculer de même le moment d'ordre 2 de X .

EXERCICE 6 - ●●●

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{|t|}{(1+t^2)^2}$.

- Étudier la parité de la fonction f .
- Montrer que f est une densité de probabilité. Soit alors X une variable aléatoire de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition de X .

4. Démontrer que X admet une espérance et en donner la valeur.
5. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

EXERCICE 7 - ●●○ - Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f . Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. 3.a. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}$$

- 3.b. Montrer que X admet une variance si, et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

4. Établir : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = 1$.

EXERCICE 8 - ●●○ - Loi de Gumbel

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x-e^{-x}}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire Z .

2. Déterminer la fonction de répartition de Z .

3. 3.a. Justifier que Z possède une espérance.

- 3.b. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} -\ln(u)e^{-u} du$. On note γ sa valeur.

- 3.c. A l'aide du changement de variable $u = e^{-x}$, démontrer : $\mathbb{E}(Z) = \gamma$.

Dans toute la suite, a et b sont des réels tels que $b > 0$. On considère à présent la fonction $F_{a,b} : x \mapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{a-x}{b}\right)\right)$.

4. Démontrer que $F_{a,b}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Gumbel de paramètres a et b lorsqu'elle admet $F_{a,b}$ comme fonction de répartition, et on notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a; b)$.

5. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a; b)$. Reconnaître la loi de $\frac{X-a}{b}$.

6. En déduire l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(a; b)$.