



9

ANALYSE GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS & FONCTIONS USUELLES

INTRODUCTION...

Cette notion omniprésente dans votre cursus mathématique depuis la troisième, et qui sera encore au cœur d'une grosse partie du programme de ECG, date du XVII^{ème} siècle. Elle fait son apparition lors d'échanges entre Johann Bernoulli et Leibniz avec l'écriture fx pour signifier " f fonction de x ". Cette notion sera étendue au XVIII^{ème} siècle par Leonhard Euler (1707-1783, suisse), à qui l'on doit la notation $f(x)$, puis par Gustave Lejeune-Dirichlet (1805-1859, allemand) jusqu'à déboucher au début du XX^{ème} siècle sur une branche complète des mathématiques, l'*analyse fonctionnelle*, dont l'objet est l'étude d'ensembles de fonctions, et qui a donné naissance à d'autres branches encore...

On peut cependant attribuer à Leibniz et Isaac Newton (1642-1727, anglais) l'introduction du *calcul différentiel* et du *calcul intégral*, dont les applications ont très largement dépassé l'objectif initial qui était de résoudre des problèmes de mécanique...

Les fonctions offrent une approche globale puisqu'elles permettent l'étude d'une même relation reliant des couples de nombres de deux ensembles (dont le premier est toujours différent des autres) : c'est cette relation qui est au centre du problème quand on étudie une fonction.

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Qu'est-ce qu'un intervalle de nombres réels ?
2. Qu'est-ce que l'inverse d'un nombre ?
3. L'inverse de 0 existe-t-il ?
4. Qu'est-ce que la racine carrée d'un nombre positif ?
5. Qu'est-ce qu'une fonction ?

I ENSEMBLE DE DÉFINITION & COMPOSÉE DE FONCTIONS

DÉFINITION 1

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de f est l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

✖ Attention aux objets !

- f est une fonction
- $f(x)$ est un nombre réel

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f :

- Rédaction pour débiter : "Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$x \in \mathcal{D}_f \iff \dots$$
- Puis il faut trouver les conditions qui font que $f(x)$ existe, l'expression donnée est utile :
 - * une fraction : le dénominateur doit être non nul
 - * une racine carrée : l'expression à l'intérieur doit être positive ou nulle
 - * du $\ln$: l'expression à l'intérieur doit être strictement positive
 - * ...
- Résoudre ces conditions (équations ou inéquations) puis conclure.

✖ Attention !

Il faut examiner toutes les conditions !

EXEMPLES 1

E1

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$.

E2

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x + 1}{-3x + 6}}$.

E3

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

Les opérations habituelles sur les fonctions ont déjà été introduites et utilisées... En particulier :

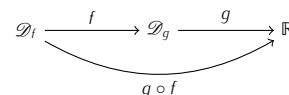
- si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et λ est un réel, alors la fonction λf est la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$, également définie sur $\mathcal{D}_f$;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $f + g$ est la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$, définie sur ;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $f \times g$ est la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$, définie sur ;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ telles que g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, définie sur .

Voyons une autre opération sur les fonctions, déjà rencontrée au lycée.

DÉFINITION 2

COMPOSITION DE FONCTIONS

Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$.
Si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$, alors la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est définie sur $\mathcal{D}_f$. On l'appelle **composée de f par g** , notée $g \circ f$.



On dit "g rond f" pour parler de $g \circ f$.

EXEMPLES 2

E1 Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{1}{x}$$

- Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

- Puisque la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$(f \circ g)(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$$

E2 Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, g(x) = \ln(x)$$

Que peut-on dire des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$?

II REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

DÉFINITION 3

GRAPHE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Le plan est muni d'un repère.
Le **graphe de f sur $\mathcal{D}$** est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) telles que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

Vocabulaire

Graphe, représentation graphique, courbe représentative sont autant d'appellations possibles.

II.1 POSITIONS RELATIVES DE DEUX COURBES

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$, de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$ dans un repère orthogonal du plan.

On dira que :

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$ lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) > g(x)$

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$ lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) < g(x)$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$, c'est préciser les ensembles sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et ceux sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Cela revient donc à résoudre les inéquations $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$. On pensera également à préciser les points d'intersection des deux courbes.

Rappel...

Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les couples (x, y) tels que $y = f(x) = g(x)$.

♣ **MÉTHODE 2** ♣ Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie très souvent le signe de $f(x) - g(x)$.

EXEMPLE 3

Considérons les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \mapsto -x + 4$ sur $\mathbb{R}$. Étudions la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

III PARITÉ & IMPARITÉ

DÉFINITIONS 4

FONCTION PAIRE / IMPAIRE

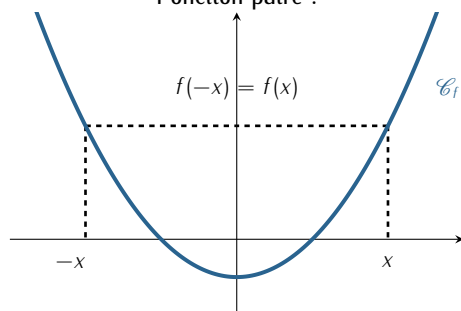
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

D1 L'ensemble $\mathcal{D}$ est **centré en 0** lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \mathcal{D} \implies -x \in \mathcal{D})$.

D2 La fonction f est **paire** lorsque : $\begin{cases} \checkmark \mathcal{D} \text{ est centré en 0} \\ \checkmark \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x) \end{cases}$

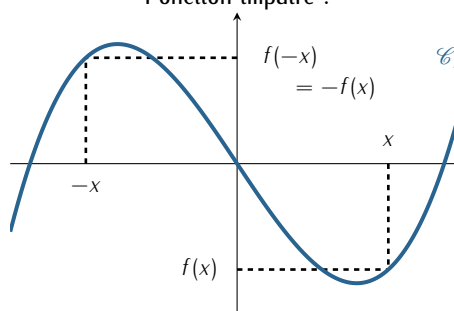
D3 La fonction f est **impaire** lorsque : $\begin{cases} \checkmark \mathcal{D} \text{ est centré en 0} \\ \checkmark \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Fonction paire :



$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Fonction impaire :



$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour étudier la parité (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$: on commence par regarder si $\mathcal{D}$ est centré en 0 :

- si $\mathcal{D}$ n'est pas centré en 0 : f ne peut pas être paire, ni impaire
- si $\mathcal{D}$ est centré en 0, alors deux cas se présentent :
 1. pour montrer que f est paire, on *démontre par le calcul* que : $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$
 2. pour montrer que f n'est pas paire, on *cherche un contre-exemple*; autrement dit, on **trouve un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$**

Important !

La négation de

" $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$ "

est :

" $\exists x \in \mathcal{D} / f(-x) \neq f(x)$ "

EXEMPLES 4

E1 Étudions la parité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$.

E2 Étudions la parité de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

E3 Démontrons que la fonction $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ n'est ni paire ni impaire.

IV MINORANT, MAJORANT, EXTREMA

Vocabulaire

L'appellation *extremum* regroupe minimum et maximum (extrema est le pluriel d'extremum).

DÉFINITIONS 5

FONCTION MAJORÉE / MINORÉE / BORNÉE - MAXIMUM / MINIMUM

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

D1 Soit $M \in \mathbb{R}$. La fonction f est **majorée par M** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M$.
Le réel M est alors *un majorant* de f .

D2 La fonction f est **majorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M$.

D3 Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction f est **minorée par m** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m$.
Le réel m est alors *un minorant* de f .

D4 La fonction f est **minorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m$.

D5 La fonction f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée sur $\mathcal{D}$.

D6 Le réel M est *le maximum* de f sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\begin{cases} \checkmark \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M \\ \checkmark \exists x_0 \in \mathcal{D} / M = f(x_0) \end{cases}$

D7 Le réel m est *le minimum* de f sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\begin{cases} \checkmark \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m \\ \checkmark \exists x_0 \in \mathcal{D} / m = f(x_0) \end{cases}$

✓ Rigueur !

On dit *un* majorant/minorant, car s'il existe un majorant, il y en a une infinité : si f est majorée par 2, alors elle est aussi majorée par 2.07, par 3, par 17, par 43... En revanche, s'ils existent, maximum et minimum sont uniques. D'où le pronom 'le'.

EXEMPLES 5

E1 La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$, mais 0 n'est pas son minimum, car la fonction n'atteint pas 0. Son minimum est 1, atteint en 0.

E2 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est minorée par 0 sur $]0; +\infty[$ mais elle n'admet pas de minimum. De plus, elle n'est pas majorée sur $]0; +\infty[$.

✍ Rédaction

On précise toujours en quelle(s) valeur(s) un maximum / minimum est atteint.

Remarque

Une fonction peut admettre un majorant/minorant sans pour autant avoir un maximum/minimum.

En pratique, il n'est pas si aisé de déterminer les éventuels extrema d'une fonction ; à moins d'avoir une connaissance plus précise de son comportement, autrement dit de ses *variations*.

V AUTOUR DES VARIATIONS...

V.1 DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 6	FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE / DÉCROISSANTE
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .	
D1	f est strictement croissante sur I lorsque : $\forall x_1, x_2 \in I, (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$.
D2	f est strictement décroissante sur I lorsque : $\forall x_1, x_2 \in I, (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$.
D3	f est monotone sur I si elle ne change pas de variations sur I .

Remarques

- Nous ne parlons (presque ?) jamais de variations sur un ensemble qui n'est pas un intervalle.
- Si on ne souhaite pas de *stricte* monotonie, les inégalités sur $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont larges.

Cette définition sert pour connaître les variations d'une fonction mais également pour manipuler les fonctions avec des inégalités :

appliquer une fonction croissante conserve le sens des inégalités, tandis qu'appliquer une fonction décroissante le change.

♣ MÉTHODE 4 ♣	Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I , on écrit :
"Soient $x_1, x_2 \in I$. Supposons que $x_1 < x_2$ ", puis deux méthodes possibles :	
1. Première méthode :	on étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$...
2. Seconde méthode :	on part de l'inégalité $x_1 < x_2$ et en procédant par opérations élémentaires (ou appliquant des fonctions dont les variations sont déjà connues), on obtient, petit à petit, l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ (ou $f(x_1) > f(x_2)$).

⇒ **Réflexe !**

Pour comparer deux quantités, on étudie souvent le signe de leur différence.

PROPRIÉTÉS 1	OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS MONOTONES
P1	Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. • Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variation ; • si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires.
P2	Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) sur I , alors $f + g$ est croissante (resp. croissante) sur I .
P3	Si f est définie sur un intervalle I et que g est définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$: • Si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante sur I. • Si f et g ont des monotonies opposées, alors $f \circ g$ est décroissante sur I.

* DÉMONSTRATION : Pour chacune des propriétés, il suffit d'utiliser la méthode vue précédemment. *

Ces propriétés peuvent être utiles pour déterminer rapidement la monotonie de certaines fonctions dans des cas simples.

EXEMPLES 6

- E1** Puisque les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- E2** La fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De façon générale, nous utiliserons tout de même ce qui suit.

V.2 LIENS AVEC LA DÉRIVÉE

On commence par refaire quelques calculs de dérivées... et apprendre le formulaire de dérivation qui suit :

Expression de la fonction	f définie sur :	Expression de la dérivée	f dérivable sur :
$f(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \quad n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

En fait, les formules des cinq premières lignes ci-dessus peuvent se retrouver en ne retenant **qu'une seule formule**, valable pour n'importe quelle valeur de m :

$$f(x) = x^m \implies f'(x) = mx^{m-1}$$

DÉRIVÉES & OPÉRATIONS

PROPRIÉTÉS 2

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I .

- P1** Si u est dérivable sur I , alors pour $\alpha \in \mathbb{R}$, αu est dérivable sur I et : $(\alpha u)' = \alpha u'$
- P2** Si u et v sont dérivables sur I , alors $u + v$ est dérivable sur I et : $(u + v)' = u' + v'$
- P3** Si u et v sont dérivables sur I , alors uv est dérivable sur I et : $(uv)' = u'v + uv'$
- P4** Si u et v sont dérivables sur I et que v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- P5** Si u et v sont dérivables sur I et que v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

PROPRIÉTÉ 3

Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans J et f une fonction définie sur J .
Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J , alors $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$$

En particulier :

- Si u est dérivable sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable sur I et : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- Si u est dérivable sur I , alors e^u est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$
- Si u est dérivable sur I et strictement positive sur I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
- Si u est dérivable sur I et strictement positive sur I , alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

EXEMPLES 7

E1 Justifions que la fonction $f : x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.

E2 Justifions que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.

E3 Justifions que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.

Et le fameux théorème (que nous pourrions démontrer plus tard dans l'année) qui relie la dérivée avec l'étude des variations d'une fonction :

THÉORÈME 1

LIEN FONCTION / DÉRIVÉE

Si f est dérivable sur un intervalle I , alors :

1. (f est constante sur I) $\iff (\forall x \in I, f'(x) = 0)$
2. (f est croissante (resp. décroissante) sur I) $\iff (\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$))
3. ($\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I) $\implies$ (f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I).

✗ Attention !

Pour la stricte croissance, il suffit que f' soit strictement positive; mais ce n'est pas nécessaire...

♣ **MÉTHODE 5** ♣ Pour étudier les variations de f sur I , trois possibilités :

1. on utilise les propriétés 1 (dans des cas simples);
2. on dérive f , on étudie le signe de sa dérivée et on utilise le théorème 1 (très majeure partie des cas);
3. si f n'est pas dérivable (ou si on ne sait pas si elle l'est), on revient à la définition. *Certains cas classiques seront vus plus tard.*

EXEMPLES 8

E1 Dressons le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (sans les limites) de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

On avait obtenu : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + 1)e^x$. D'où :

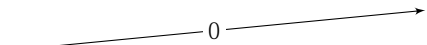
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f			

E2 Dressons le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (sans les limites) de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

On avait obtenu : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0 ; f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f			

VI FONCTIONS USUELLES

Un récapitulatif des fonctions étudiées depuis la première et quelques nouveautés. À partir de ces exemples, nous construirons presque toutes les fonctions étudiées ces deux prochaines années. C'est dire leur importance.

Remarque

Un chapitre spécifique sera consacré aux fonctions polynomiales.

VI.1 FONCTION INVERSE

DÉFINITION 7

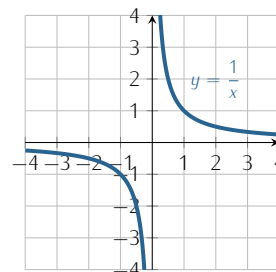
FONCTION INVERSE

La **fonction inverse** est la fonction :

$$\frac{1}{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

PROPRIÉTÉS 4

- P1** La fonction inverse est impaire.
P2 La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$.



* DÉMONSTRATION : Aucune difficulté particulière (étude des variations à savoir faire sans la dérivée).

*

VI.2 FONCTION VALEUR ABSOLUE

DÉFINITIONS 8

VALEUR ABSOLUE

- D1** Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est le réel défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
D2 La **fonction valeur absolue** est la fonction :

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

Pour info...

La fonction valeur absolue est une fonction **affine par morceaux**.

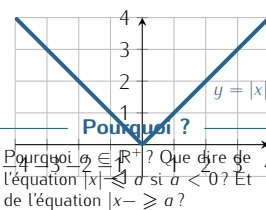
EXEMPLES 9

$$|17| = \quad ; \quad |-3| = \quad ; \quad \left| \frac{-1}{3} \right| = \quad ; \quad |\pi - 3| = \quad ; \quad |\sqrt{2} - 2| = \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}, |(x-1)^2| = (x-1)^2$$

Immédiatement à l'aide de la définition, on a :

PROPRIÉTÉS 5

- P1** Pour tout $x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$.
P2 La fonction valeur absolue est paire.
P3 La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
P4 $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |x| = a \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$
P5 $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$



Pourquoi ?

Pourquoi $0 \in \mathbb{R}^+$? Que dire de l'équation $|x| \leq a$ si $a < 0$? Et de l'équation $|x| \geq a$?

$$\boxed{\text{P6}} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

★ DÉMONSTRATION : Aucune difficulté particulière.

★

EXEMPLES 10

E1 Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $|x - 3| = 5$:

E2 Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|-x + 2| \leq 5$:

E3 Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|2x + 4| \geq 1$:

Remarque

Le nombre $|x - y|$ peut être vu comme la distance entre x et y .

PROPRIÉTÉS 6

P1 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$ et pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

P2 Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|x^n| = |x|^n$

P3 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

★ DÉMONSTRATION :

P1. Sans difficulté, en distinguant des cas selon les signes de x et y .

P2. Par récurrence, en utilisant P1.

P3.

★

Et pour terminer avec la valeur absolue, une propriété qui sera utile :

PROPRIÉTÉ 7

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

On a l'équivalence :

f est bornée sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$

★

DÉMONSTRATION : Raisonnons par double implication.

⇐ Supposons que la fonction $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$. Il existe alors un réel M , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, |f(x)| \leq M$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, -M \leq f(x) \leq M$$

Conclusion : la fonction f est bornée sur $\mathcal{D}$.

⇒ Supposons que f est bornée sur $\mathcal{D}$. Il existe alors deux réels m et M , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, m \leq f(x) \leq M$$

Posons $A = \max(|m|, |M|)$. On a ainsi :

$$-|m| \leq m ; -A \leq -|m| ; M \leq |M| ; |M| \leq A$$

D'où :

$$\forall x \in \mathcal{D}, -A \leq f(x) \leq A$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, |f(x)| \leq A$$

Conclusion : la fonction $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$.

Conclusion : f est bornée sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $|f|$ est majorée sur $\mathcal{D}$

★

► Réflexe !

Si on veut démontrer $|X| \leq A$, avec $A \in \mathbb{R}^+$, on démontre $-A \leq X \leq A$.

VI.3 FONCTION RACINE CARRÉE

Nul besoin de débattre sur le nombre de solutions de l'équation $z^2 = x$, d'inconnue $z \in \mathbb{R}$, où x est un nombre réel...

DÉFINITIONS 9

RACINE CARRÉE

D1 Soit $x \in \mathbb{R}^+$. L'unique solution positive de l'équation $z^2 = x$ est appelée **racine carrée de x** , notée $\sqrt{x}$.

D2 La **fonction racinée carrée** est la fonction :

$$\sqrt{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

PROPRIÉTÉS 8

P1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} = x$

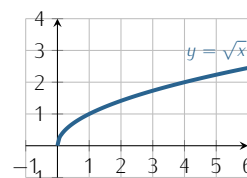
P2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

P3 La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

★

DÉMONSTRATION :

P1. Immédiat par définition de $\sqrt{x}$.



P2.

P3. (Sans utilisation de la dérivée)

★

VI.4 FONCTION PARTIE ENTIÈRE

DÉFINITIONS 10PARTIE ENTIÈRE

D1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x est appelé **partie entière de x** , noté $\lfloor x \rfloor$.

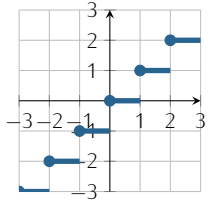
D2

La **fonction partie entière** est la fonction :

$$\lfloor . \rfloor : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$$

★Subtil...★

En toute rigueur, il faudrait justifier au préalable l'existence de ce "plus grand entier relatif inférieur ou égal à x ". en maths appro, ils peuvent !



La fonction partie entière est constante par morceaux.

EXEMPLES 11

$\lfloor 1,7 \rfloor = \quad ; \lfloor 43 \rfloor = \quad ; \lfloor 0,9 \rfloor = \quad ; \lfloor -3,1 \rfloor = \quad ; \lfloor -0,1 \rfloor = \quad$

PROPRIÉTÉS 9

P1

$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

P2

$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, (\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1)$

P3

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

★ DÉMONSTRATION :
P1.

P2. Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par double implication.

P3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalences.

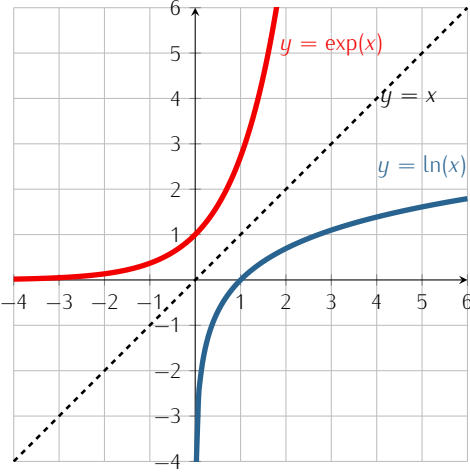
★

EXEMPLE 12

Réolvons l'équation $[x^2] = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

VI.5 FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME NÉPÉRIEN

Contentons-nous ici de faire un inventaire de tout ce que nous savons sur ces deux fonctions en mettant en parallèle leurs propriétés... Les démonstrations sur l'exponentielle seront revues en exercice.

	exp	ln
Définition	Unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$...	Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x)$ est l'unique solution de l'équation $\exp(y) = x$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+*}$
Signe	$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$	$\forall x \in]0; 1[, \ln(x) < 0$; $\forall x \in]1; +\infty[, \ln(x) > 0$
Valeurs remarquables	$\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e \simeq 2,72$	$\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$
Dérivée	$\exp' = \exp$; $(\exp \circ u)' = u' \exp(u)$	$\ln' = \frac{1}{x}$; $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$
Variations	Strictement croissante sur $\mathbb{R}$	Strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$
Relation fondamentale	$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$	$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
Propriétés algébriques (qui se déduisent de la relation fondamentale)	$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ $\exp(x) = e^x$	$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z},$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ $\ln(x^n) = n \ln(x)$ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$
Courbes représentatives	 Les courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice...	
Liens entre elles	Par définition de $\ln$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}, \exp(y) = x \iff y = \ln(x)$ Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln(x)) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$ $\exp$ et $\ln$ sont donc réiproques l'une de l'autre... D'où la symétrie des courbes !	

VI.6 FONCTIONS PUISSANCES

DÉFINITION 11

FONCTION PUISSANCE α

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La **fonction puissance α** est la fonction :

$$\begin{aligned} \cdot^\alpha : \mathbb{R}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x &\longmapsto \exp(\alpha \ln(x)) \end{aligned}$$

Remarque

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, on en a une définition depuis bien longtemps.

→ Réflexe !

Il faudra penser à cette écriture à chaque fois que l'exposant est une variable... Comme dans l'étude de la fonction $x \mapsto x^x$.

En particulier, on obtient :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

La définition précédente et les propriétés sur l'exponentielle permettent de démontrer sans difficulté :

PROPRIÉTÉS 10

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

P1 $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$

P2 $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

P3 $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$ et $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

P4 $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$

On retrouve la dérivée bien connue sur les puissances entières :

THÉORÈME 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

★ DÉMONSTRATION : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

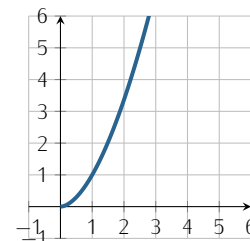
$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= x^\alpha \\ &= \exp(\alpha \ln(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $f_\alpha = \exp \circ u$, avec $u : x \mapsto \alpha \ln(x)$. Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_α l'est également et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

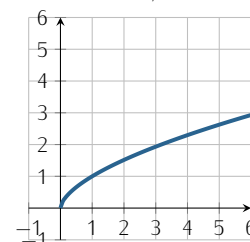
$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= u'(x) \exp(u(x)) \\ &= \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(x)) \\ &= \frac{\alpha}{x} x^\alpha \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Graphiquement, on retrouve essentiellement trois cas :

$\alpha > 1$ (type fonction carrée) :



$0 < \alpha < 1$ (type fonction racine carrée) :



$\alpha < 0$ (type fonction inverse) :

