

EXERCICES DU CHAPITRE 9

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ET FONCTIONS USUELLES

EXERCICE 1 - ●●● - Retour sur le chapitre 1

Rappeler l'écriture quantifiée de chaque phrase puis en écrire la négation.

On désignera par f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est positive sur I .
2. La fonction f est majorée sur I .
3. La fonction f est croissante sur I .

EXERCICE 2 - ●●● - Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

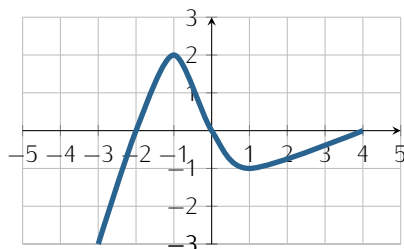
1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
3. $f : x \mapsto \ln(6 + 5x - x^2)$
4. $f : x \mapsto \ln(x + 3) - \ln(x + 1)$
5. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x + 3}{x + 1}\right)$
6. $f : x \mapsto \ln(e^x + x^2)$
7. $f : x \mapsto \ln(e^x - 2)$
8. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$

EXERCICE 3 - ●●● - Positions relatives

Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 4 - ●●● - Transformations d'une courbe

Considérons f la fonction, définie sur $[-3; 4]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe.

1. $g : x \mapsto -f(x)$
2. $h : x \mapsto f(-x)$
3. $i : x \mapsto |f(x)|$
4. $j : x \mapsto f(x + 2)$
5. $k : x \mapsto f(x - 1)$

EXERCICE 5 - ●●● - Parité/imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f .

1.a. $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1.b. $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.c. $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1} + |x|$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.d. $f : x \mapsto \frac{x - 1}{x^2 + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.e. $f : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.

EXERCICE 6 - ●○○ - Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.
2. Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.
3. Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

EXERCICE 7 - ●●● - Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Démontrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, définies sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8 - ●●● - Variations et équivalence...

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, (f(a) = f(b) \iff a = b)$$

2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir :

$$\forall a, b \in I, (f(a) \leq f(b) \iff a \leq b)$$

3. L'équivalence précédente est-elle encore vraie si la croissance de f n'est pas stricte ?

EXERCICE 9 - ●○○ - Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les nombres suivants : $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(6) - \ln(3)$; $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes :

2.a. $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$, où $x \in \mathbb{R}$.

2.b. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^{++}$.

2.c. $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$, où $x \in \mathbb{R}$.

2.d. $\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$, où $x \in \mathbb{R}$.

2.e. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.f. $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

EXERCICE 10 - ●●● - Résolution d'équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$, où $x \in \mathbb{R}$.
2. $(1 + \ln(x))^2 = 4$, où $x \in \mathbb{R}^{++}$.
3. $|\ln(x)| = 1$, où $x \in \mathbb{R}^{++}$.
4. $|e^x| = 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
5. $|x + 3| = -1$, où $x \in \mathbb{R}$.
6. $|x + 5| = |2x - 7|$, où $x \in \mathbb{R}$.
7. $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$, où $x \in \mathbb{R}$.
8. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$, où $x \in \mathbb{R}$.
9. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
10. $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$, où $x \in \mathbb{R}^{++}$.
11. $e^{2x} = 2e^x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
12. $e^x - 2e^{-x} = 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
13. $|x + 5| < 3$, où $x \in \mathbb{R}$.
14. $|x - 2| \leq 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
15. $|2x - 1| \geq 4$, où $x \in \mathbb{R}$.
16. $|9 - x^2| \geq -2$, où $x \in \mathbb{R}$.
17. $5 - x^2 < 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
18. $\ln(1 + x^2) \leq \ln(2)$, où $x \in \mathbb{R}$.
19. $e^{2x-1} \geq 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
20. $\frac{1}{e^x + 1} < 2$, où $x \in \mathbb{R}$.
21. $0,5^x < 0,1$, où $x \in \mathbb{R}$.
22. $2^x \leq 3$, où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 11 - ●○○ - Calculs de dérivées

Justifier que chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{++}$
2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^7}$ sur $\mathbb{R}^{++}$
3. $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{++}$
4. $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f : x \mapsto \sqrt{x}e^x + 1$ sur $\mathbb{R}^{++}$
9. $f : x \mapsto (\ln(1 + x))^4$ sur $\mathbb{R}^+$
10. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 12 - ●○○ - Étude de deux fonctions

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x^3 + 4}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la dérivée de f .
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

- 2.a. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
 - 2.b. Calculer $g(2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*
 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
 5. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.

EXERCICE 13 - ●○○ - Étude de fonctions

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

1. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$
2. $f : x \mapsto 3x + \frac{1}{x^3}$
3. $f : x \mapsto x \ln(x) - x$
4. $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$
5. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$
6. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
7. $f : x \mapsto x^x$

EXERCICE 14 - ●○○ - Établir des inégalités

1. Encadrer $e^{(1-x)^2}$ pour $x \in [2; 4]$
2. Démontrer : $\forall x \in [0; 1], 0 < e^{-x} + x \leq 2$.
3. Démontrer : $\forall x \in [2; +\infty[, \frac{1}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x(x-1)}$.
4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
5. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{\frac{3x}{x+2}} \geq \sqrt{\frac{3x}{x+5}}$.

EXERCICE 15 - ●○○ - Des inégalités classiques

1. 1.a. En étudiant la fonction $x \mapsto e^x - x$, démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

1.b. En déduire que pour tout réel positif x :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

EXERCICE 16 - ●●● - Logarithme et moyenne...

Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$$

EXERCICE 17 - ●●● - Maximum sur les entiers

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\max_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{n}\right)$.