10

Analyse

Développements limités des fonctions

Introduction...

Dans ce chapitre, nous verrons les derniers outils d'étude des fonctions d'une variable du programme. Dans le chapitre 4, nous avons introduit les notions d'équivalence et négligeabilité entre fonctions qui nous sont utiles dans l'étude des intégrales impropres ; et l'équivalence de fonctions peut également nous aider dans la recherche des limites d'une fonction.
Quand un équivalent ne suffit pas, ou ne permet pas (s'il s'agit de vouloir les sommer...) de conclure, on peut légitimement se poser de préciser cet équivalent...

Par exemple : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\mathrm{e}^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$... L'idée est donc parfois de préciser ce "$\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$". En effet, ce n'est pas ce qui manque les "$\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$", on a par exemple : $x^2 = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$, mais aussi $x^{\frac{3}{2}}$, x^4, $43x^{17}$...

I Définitions et premières propriétés

Définitions 1 — **Développements limités**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a, mais pas nécessairement en a.

D1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f admet un **développement limité d'ordre n en a** (ou au voisinage de a) lorsqu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que, au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

D2 En particulier :

- f admet un **développement limité d'ordre 0 en a** lorsqu'il existe un réel a_0 tel que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + \underset{x\to a}{o}(1)$$
- f admet un **développement limité d'ordre 1 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1 tels que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)\right)$$
- f admet un **développement limité d'ordre 2 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que, au voisinage de a :
$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Remarque
Seuls les DL à l'ordre 0,1 et 2 sont au programme.

En gros...
- Un $DL_0(a)$ est une approximation de f par une constante, valable au voisinage de a.
- Un $DL_1(a)$ est une approximation de f par une fonction affine, valable au voisinage de a.
- Un $DL_2(a)$ est une approximation de f par une fonction polynomiale de degré 2, valable au voisinage de a.

Exemples 1

E1 On sait que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$. Donc $\ln(x) = x - 1 + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$.

Conclusion : la fonction logarithme népérien admet un $DL_1(1)$: $\ln(x) = x - 1 + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$.

E2 On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

Conclusion : la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un $DL_1(0)$: $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

☞ Rappel...
$f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + \underset{a}{o}(g)$

E3 On sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $e^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$; autrement dit : $e^x - 1 - x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Par conséquent :
$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Conclusion : la fonction exponentielle admet un $DL_1(0)$: $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

E4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
Pour tout $x \neq 1$ suffisamment proche de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\\ &= \frac{x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

Or : $1 - x \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1}$. Mais $x^{n+1} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. D'où :

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Conclusion : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Théorème 1 — **Unicité du développement limité**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a, mais pas nécessairement en a.
Si f admet un $DL_n(a)$, alors celui-ci est unique.

⋆ Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que f possède deux $DL_n(a)$ distincts en a. Il existe alors des réels $a_0, ..., a_n, b_0, .., b_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

et :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Ainsi :

$$a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Puisque ces deux DL sont distincts, il existe au moins un entier $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $a_k \neq b_k$. Notons $p = \min\{k \in [\![0;n]\!] \ / \ a_k \neq b_k\}$. Ainsi, il reste en fait :

$$a_p(x-a)^p + ... + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) = b_p(x-a)^p + b_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

D'où, en particulier :

$$a_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right) = b_p(x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right)$$

Et donc :

$$(a_p - b_p)(x-a)^p = \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^p\right)$$

Ce qui implique :

$$\lim_{x\to a} \frac{(a_p-b_p)(x-a)^p}{(x-a)^p} = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to a}(a_p - b_p) = 0$$

Et donc $a_p - b_p = 0$: absurde ! ⋆

Pourquoi ?
Pour tous $r, s \in \mathbb{N}$:
$$r \geqslant s \Longrightarrow y^r = \underset{y\to 0}{o}(y^s)$$

Avouons que dans 99% des cas, nous chercherons un DL en 0... Alors retenons l'allure des $DL_1(0)$ et $DL_2(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \underset{x\to 0}{o}(x) \quad ; \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Les développements limités précisent en fait les équivalents... et sont nettement plus puissants pour les calculs. En effet, on ne peut sommer ni composer des équivalents ; alors que c'est possible pour les développements limités. En effet, même s'ils ne sont valables qu'au voisinage de a, il n'en demeure pas moins qu'une fonction est *égale* à son DL autour de a. **Lorsqu'un calcul de limite ou d'équivalent n'aboutit pas, on peut tenter un développement limité.** Conformément au programme, aucune théorie ne sera soulevée sur les techniques de calculs des DL, en revanche, on garde en tête que l'**on peut sommer des DL**.

II Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

Théorème 2 — **Formules de Taylor-Young**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur I.

T1 Si f est $\mathscr{C}^0$ sur I, alors f admet un $DL_0(a)$ et :

$$f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$$

T2 Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors f admet un $DL_1(a)$ et :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)\right)$$

T3 Si f est $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f admet un $DL_2(a)$ et :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$$

Utile !
A écrire avec $x = a + h$, où $h \to 0$...

Important !
Les formules de Taylor-Young fournissent deux choses :
- une condition **suffisante** d'existence d'un DL
- une expression du DL !

⋆ Démonstration :

T1. Supposons que f est continue sur I. On a, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + \left(f(x) - f(a)\right)$$

Puisque f est continue en a, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. D'où : $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - f(a)\right) = 0$.

Conclusion : au voisinage de a, on a $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$ et ainsi la fonction f admet un $DL_0(a)$.

☞ Rappel...
$h = \underset{a}{o}(1) \iff \lim\limits_{a} h = 0$

T2. Supposons que f est $\mathscr{C}^1$ sur I. En particulier, f est dérivable en a et :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Autrement dit, au voisinage de a :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$$

D'où, au voisinage de a :

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

Remarque

Le caractère $\mathscr{C}^1$ n'était pas nécessaire... La dérivabilité suffit !

Conclusion : au voisinage de a, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ et ainsi la fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.

T3. Supposons que f est $\mathscr{C}^2$ sur I. Dans ce cas, f' est $\mathscr{C}^1$ sur I et on peut donc lui appliquer le résultat de **T2** : f' admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ et :

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

Autrement dit, il existe une fonction ε_1 définie sur I telle que :

- ✓ pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)$,
- ✓ $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.

On a ainsi, pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = f'(a) + f''(a)(t-a) + \varepsilon_1(t)(t-a)$$

Soit $x \in I$. En intégrant l'égalité précédente, licite car f' est continue sur I :

$$\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x \big(f'(a) + f''(a)(t-a) + \varepsilon_1(t)(t-a)\big)\, dt$$

Or :

- d'une part :

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)dt &= \big[f(t)\big]_a^x \\ &= f(x) - f(a)\end{aligned}$$

- d'autre part, par linéarité de l'intégrale, licite car chacune des fonctions en jeu est continue sur I ($t \longmapsto \varepsilon_1(t)(t-a)$ est la différence de fonctions continues sur I...) :

$$\begin{aligned}\int_a^x \big(f'(a) + f''(a)(t-a) + \varepsilon_1(t)(t-a)\big)\, dt &= \int_a^x f'(a)dt + f''(a)\int_a^x t-a dt + \int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt \\ &= f'(a)(x-a) + f''(a)\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x + \int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt \\ &= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt\end{aligned}$$

♥ Astuce du chef ♥

Plutôt que de choisir $t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 - at$ comme primitive de $t \longmapsto t-a$, on choisit $t \longmapsto \frac{(t-a)^2}{2}$ qui rend les calculs un peu plus rapides !

D'où :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt$$

Posons maintenant la fonction $\varepsilon_2 : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt & \text{si } x \in I\setminus\{a\} \\ 0 & \text{si } x = a\end{cases}$ de sorte que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \varepsilon_2(x)(x-a)^2$$

Il ne reste qu'à démontrer que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$...

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$, il existe $\delta > 0$, que nous considérons ensuite, tel que pour tout $x \in [a-\delta; a+\delta]$, $|\varepsilon_1(x)| \leqslant \varepsilon$.

Soit alors $x \in [a-\delta; a+\delta]$.

- Si $x = a$, on a $\varepsilon_2(x) = 0$, donc $|\varepsilon_2(x)| \leqslant \varepsilon$.
- Si $x \neq a$:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_2(x)| &= \left|\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt\right| \\ &= \frac{1}{(x-a)^2}\left|\int_a^x \varepsilon_1(t)(t-a)dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(x-a)^2}\varepsilon\left|\int_a^x (t-a)dt\right|\end{aligned}$$

$x \in [a-\delta; a+\delta]$, donc pour tout $x \in [a;x]$ (ou $[x;a]$) $|\varepsilon_1(x)| \leqslant \varepsilon$ puis croissance de l'intégrale (licite car en valeur absolue...)

Autrement dit :

$$|\varepsilon_2(x)| \leqslant \frac{1}{(x-a)^2}\varepsilon\frac{(x-a)^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc établi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ \forall x \in [a-\delta; a+\delta],\ |\varepsilon_2(x)| \leqslant \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$$

On a finalement établi l'existence d'une fonction ε_2 définie sur I telle que :

✓ $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2} + \varepsilon_2(x)(x-a)^2$

✓ $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Conclusion : au voisinage de a, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2} + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^2\right)$ et ainsi f admet un $\mathrm{DL}_2(a)$.

☞ **Pour info...**
Pour démontrer la formule dans le cas général d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, on procède par récurrence... et l'hérédité est identique à ce qui a été fait pour **T3**.

⋆

EXEMPLES 2

À retenir...
Les DL obtenus dans ces exemples sont à connaître !

E1 Justifions que la fonction exponentielle admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.
La fonction exp est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc elle admet un $\mathrm{DL}_2(a)$ et par formule de Taylor-Young :

$$\exp(x) = \exp(0) + \exp'(0)x + \exp''(0)\frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

Conclusion : $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

Puis, en composant par $x \longmapsto -x$ par la droite, on obtient : $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

E2 Justifions que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.
La fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;+\infty[$, donc elle admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et par formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

Or, pour tout $x \in]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Conclusion : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

E3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifions que la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et déterminons-le.
La fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;+\infty[$, donc elle admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ et par formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

Or, pour tout $x \in]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad ; \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

Conclusion : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

En particulier :

- si $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.
- si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.
- si $\alpha = \dfrac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

♣ **Méthode !**
En pratique, il est très rare d'utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir un DL. En effet, les DL sont souvent utilisés comme des outils de calculs pour obtenir des limites ou des équivalents.

III Applications des développements limités

III.1 Recherche de limite, d'équivalents et étude de dérivabilité

THÉORÈME 3 — **CNS d'existence des $\mathrm{DL}_0(a)$ et $\mathrm{DL}_1(a)$**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a.

✘ **Attention !**
Il n'existe pas de CNS simple d'existence d'un $\mathrm{DL}_2(a)$.

Autrement dit :
Si f n'est pas définie en a, alors f

T1 f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f est continue en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$$

T2 Si f n'est pas définie en a, alors : f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f admet une limite finie en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = \lim_a f + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$$

T3 f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si, et seulement si, f est dérivable en a ; et le cas échéant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big((x-a)\big)$$

★ Démonstration :

T1. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ C'est théorème 2 - T1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$.
Il existe alors $a_0 \in \mathbb{R}$ tel, au voisinage de a : $f(x) = a_0 + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$. Autrement dit, il existe une fonction ε de limite nulle en a telle que, au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$$

Mais alors :

- $f(a) = a_0$ (l'égalité est vraie en a, car f est définie en a)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \big(a_0 + \varepsilon(x)\big) = a_0$ (car $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$)

D'où :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Conclusion : f est continue en a et on a $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$.

T2. Démonstration presque identique au premier point...

T3. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Conséquence de théorème 2 - T2.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
Il existe alors $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tel, au voisinage de a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$. Autrement dit, il existe une fonction ε de limite nulle en a telle que, au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$

Mais alors : $f(a) = a_0$ (l'égalité est vraie en a, car f est définie en a) D'où, pour tout $x \neq a$ suffisamment proche de a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{a_0 + a_1(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) - f(a)}{x-a} \\ &= \frac{a_1(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)}{x-a} && f(a) = a_0 \\ &= a_1 + \varepsilon(x)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$... Donc : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = a_1$.
Par conséquent, f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.
Conclusion : f est dérivable en a et on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$.

★

Propriété 1 — **Lien DL / équivalent**

Si une fonction admet un développement limité en a, alors elle est équivalente en a au "premier" terme non nul de ce développement limité.

★ Démonstration : Immédiat. ★

Pour un équivalent, il ne doit rester qu'un seul terme !

Exemples 3

E1 Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)-1}{x^2} &= \frac{x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-x}{x^2}\\ &= \frac{\frac{-1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2}\\ &= \frac{-1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$.

E2 Donnons un équivalent simple de $\dfrac{e^x-1}{x\ln(1+x)-x^2}$ lorsque x tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{x\ln(1+x)-x^2} &= \frac{x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)-x^2}\\ &= \frac{x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{-\frac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{-x^3}{2}}\end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{e^x-1}{x\ln(1+x)-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-2}{x^2}$.

E3 Montrons que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x-1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x-1}{x}\\ &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1}{x}\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\end{aligned}$$

- Puisque f admet un $DL_0(0)$, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.
- Puisque f admet un $DL_1(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : f st prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0)=1$; dans ce cas, son prolongement est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

E4 Considérons la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0\\ 1 & \text{si } x = 0\end{cases}$.

- Montrons que f est continue en 0.
  Puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
  $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$
  Par conséquent :
  $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$
  Conclusion : la fonction f est continue en 0.
- Montrons que f est dérivable en 0 et déterminons $f'(0)$.
  Pour $x \neq 0$, suffisamment proche de 0, on a :
  $$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\\ &= \frac{\frac{x-e^x+1}{e^x-1}}{x}\\ &= \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\\ &= \frac{x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}\end{aligned}$$

Remarque
On met en place une méthode différente de celle de l'exemple précédent. Il suffit d'essayer pour se rendre compte que ce qui a été fait au-dessus ne convient pas ici...

$$= \frac{\frac{-x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2 + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \underbrace{\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}_{=\frac{-1}{2}}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1}{2}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

♣ Méthode !
Ajouter des DL c'est simple ! Diviser des DL est un peu plus technique et est hors programme en ECG... Quand on coince à ce niveau et que l'énoncé demande une limite ou un équivalent, il suffit bien souvent de repasser aux équivalents pour conclure.

III.2 Étude de position relative entre une courbe et sa tangente

✘ Attention !
Cette méthode ne fournit la position relative que **localement** !

♣ Méthode 1 ♣ Pour étudier la position relative d'une courbe avec sa tangente en a au voisinage de a, on peut :

- déterminer le $DL_2(a)$ de f,
- puis, si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$, alors :
  - ✱ l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est : $y = a_0 + a_1(x-a)$,
  - ✱ si $a_2 \neq 0$, alors : $f(x) - \left(a_0 + a_1(x-a)\right) \underset{x\to a}{\sim} a_2(x-a)^2$ et le signe de $f(x) - \left(a_0 + a_1(x-a)\right)$ au voisinage de a est alors le signe de a_2.

Remarque
On n'oublie pas que l'on peut également étudier le signe de la différence par des méthodes plus "habituelles"...

☞ Rappel...
Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g ont même signe au voisinage de a.

Exemple 4

On considère la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}\sqrt{1+x}$, définie sur $[-1;+\infty[$, et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Calculer le $DL_2(0)$ de f puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x}\sqrt{1+x} \\
&= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Important !
Après avoir développé, tous les termes négligeables devant x^2 au voisinage de 0 sont dans $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$: les termes en x^3, en x^4,...

Conclusion :

- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite $y = \frac{-1}{2}x + 1$;
- $f(x) - \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{8}x^2$, donc, pour x suffisamment proche de 0, on a : $f(x) - \left(\frac{-1}{2}x + 1\right) \leqslant 0$.
  Au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de sa tangente.