

EXERCICE 1 - ●●● - Recherche de limites

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 puis leur limite en 0 :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$

5. $f : x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$

2. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

6. $f : x \mapsto \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

3. $f : x \mapsto \frac{(e^x - 1)^2}{x \ln(1+x)}$

7. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

4. $f : x \mapsto \frac{x^2}{\ln(1+x) + e^x - 1}$

EXERCICE 2 - ●●●

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes en 0.

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x \ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

EXERCICE 3 - ●●● - Position relative

Considérons la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1+x} + 1$, définie sur $[-1; +\infty[$, et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
2. Représenter l'allure de \mathcal{C}_f en précisant la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0 au voisinage de 0.

EXERCICE 4 - ●●● - Nature d'une série

Justifier la convergence de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.