



10

ANALYSE FONCTIONS POLYNOMIALES

INTRODUCTION...

Ah... les équations! Impossible de faire des mathématiques sans parler d'équation. Équation diophantienne, équation différentielle, équation aux dérivées partielles,... Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations algébriques, dont vous connaissez déjà des cas particuliers : les équations du premier et du second degré.

Les équations étudiées seront donc de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, où les a_i sont des réels connus (coefficients) et l'inconnu est un réel x .

Nous retrouverons bien entendu la méthode vue pour les équations du second degré... En revanche, c'est plus subtile pour les degrés supérieurs.

- Degré 3 : Tartaglia (Niccolo Fontana, 1499-1557, italien) a donné une méthode dans des cas particuliers ; sa méthode a été volée et étendue au cas général par Girolamo Cardano (1501-1576, italien) qui en a profité pour *inventer* les **nombres complexes**...
- Degré 4 : nous devons la méthode à Ludovico Ferrari (1522-1565, italien)
- Degrés supérieurs ou égaux à 5 : Niels Abel (1802-1829, norvégien) a publié en 1824 un article démontrant qu'il **n'existe pas de méthode générale** pour déterminer et exprimer sous forme de radicaux les racines d'une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 5. Peu après, Evariste Galois (1811-1832, français) a donné un moyen de savoir quelles équations algébriques de degré supérieur ou égal à 5 sont résolubles par radicaux. On doit à Galois une vision toute nouvelle de la recherche des racines d'une fonction polynomiale à l'aide de sa très belle et fameuse **théorie de Galois**.

Que de frustration! D'autant plus que l'on sait, d'après le théorème fondamental de l'algèbre, que *tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe* (la démonstration de ce théorème est due aux efforts conjoints de bon nombre de mathématiciens : Lagrange, Cauchy, D'Alembert, Gauss... entre la fin du XVIII^{ème} et le début du XIX^{ème} siècle).

Bref : plus de 10 siècles de recherches pour aboutir aux résultats complets sur la résolubilité par radicaux des équations algébriques...

I DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 1

FONCTIONS POLYNOMIALE

D1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La **fonction puissance n** est la fonction :

$$\begin{array}{lcl} .^n : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}} \end{array}$$

D2 Une **fonction polynomiale** est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés **coefficients** de P .

D3 La **fonction polynomiale nulle** est la fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls (fonction constante égale à 0).

D4 **Degré d'une fonction polynomiale, noté $\deg(P)$:**

- Si P est la fonction constante égale à 0, on dit, par convention, que $\deg(P) = -\infty$;
- sinon, $\deg(P)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

D5 Si $\deg(P) = n$, alors le **coefficient dominant** de P est le coefficient a_n .

Important !

Par convention :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$$

et l'on pourra ainsi écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

PROPRIÉTÉS 1

Soient P et Q deux fonctions polynomiales.

P1 $P + Q$ est une fonction polynomiale et $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

P2 $P \times Q$ est une fonction polynomiale et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

P3 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P^m est une fonction polynomiale et $\deg(P^m) = m \deg(P)$.

P4 Si P est constante, alors $P' = 0$; sinon, P' n'est pas nulle et $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

★ DÉMONSTRATION :

- P1.**
- Si l'une des fonctions est nulle, alors le résultat est évident.
 - Sinon, les deux fonctions polynomiales P et Q ne sont pas nulles, et il existe alors des réels $a_0, a_1, \dots, a_{\deg(P)}$

$$(\text{avec } a_{\deg(P)} \neq 0) \text{ et } b_0, b_1, \dots, b_{\deg(Q)} (\text{avec } b_{\deg(Q)} \neq 0) \text{ tels que } P : x \mapsto \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k x^k \text{ et } Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{\deg(Q)} b_k x^k.$$

On pose $d = \max(\deg(P), \deg(Q))$. Ainsi, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k \quad ; \quad Q(x) = \sum_{k=0}^d b_k x^k$$

avec éventuellement : $\forall k \in [\deg(P) + 1; d], a_k = 0$ ou $\forall k \in [\deg(Q) + 1; d], b_k = 0$.

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P + Q)(x) = \sum_{k=0}^d (a_k + b_k) x^k$$

Conclusion : par définition, $P + Q$ est bien une fonction polynomiale et son degré est soit $-\infty$ (si pour tout $k \in [0; d], a_k + b_k = 0$) soit le plus grand entier k tel que $(a_k + b_k) \neq 0$: dans les deux cas, il est inférieur ou égal à d .

P2. Un peu plus pénible à écrire...

P3. Par récurrence (à faire) en utilisant le point précédent.

P4.

- Si P est constante, alors on sait déjà que $P' = 0$.

- Si P n'est pas constante.

Puisque P n'est pas constante, on a

$$\deg(P) \neq 0$$

Notons $n = \deg(P)$.

Il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Ainsi, P est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

On remarque alors que P' est une fonction polynomiale et, puisque $a_n \neq 0$ et $n \neq 0$, on a :

$$na_n \neq 0$$

D'où :

$$\deg(P') = n - 1$$

Conclusion : $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

★

II RACINES D'UNE FONCTION POLYNOMIALE ET FACTORISATION...

DÉFINITION 2

RACINE D'UNE FONCTION POLYNOMIALE

Soient P une fonction polynomiale et α un réel.
On dit que α est **racine de P** lorsque $P(\alpha) = 0$.

Pour les fonctions polynomiales de degré 1 (qui sont des fonctions affines), la recherche de racine ne pose plus de souci depuis bien longtemps... Pour celles de degré 2 non plus, mais faisons tout de même des rappels et quelques compléments.

II.1 RACINES D'UNE FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 2

THÉORÈME 1

RACINES D'UNE FONCTION POLYNOMIALE DE DEGRÉ 2 & FACTORISATION.

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle et il ne peut se factoriser en produit de fonctions polynomiales de degré 1.

2. Si $\Delta = 0$, alors le réel x_0 défini par $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est la seule racine de P ; et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_0)^2$$

3. Si $\Delta > 0$, alors les réels x_1 et x_2 définis par $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les racines de P ; et de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Un peu d'Histoire

La méthode de résolution des équations de degré 2 est due à Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, qui l'a publiée au IX^{ème} siècle.

Vocabulaire

- Δ est appelé **discriminant** de P ...
- On dit que x_1 et x_2 sont **racines simples** ou **racine de multiplicité 1** de P ; et que x_0 est **racine double** ou **racine de multiplicité 2**...

★

DÉMONSTRATION :

Explication

★

En conséquence de ce théorème et des formes factorisées obtenues, on a immédiatement :

PROPRIÉTÉS 2

RELATIONS COEFFICIENTS - RACINES

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ et $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2.

P1 Le produit des racines *comptées avec leurs multiplicités* de P est égal à $\frac{c}{a}$.

P2 La somme des racines *comptées avec leurs multiplicités* de P est égale à $-\frac{b}{a}$.

Important !

L'expression "*comptées avec leurs multiplicités*" permet de regrouper les cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$.

II.2 RETOUR AU CAS GÉNÉRAL : RACINES ET FACTORISATION

LEMME 1

UNE IDENTITÉ REMARQUABLE (HP)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

★

DÉMONSTRATION :

★

THÉORÈME 2

DE FACTORISATION DES FONCTIONS POLYNOMIALES

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\alpha \text{ est racine de } P) \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

Utile

On a même une information sur les degrés :

$$\deg(Q) = \deg(P) - 1$$

★

DÉMONSTRATION : Raisonnons par double implication.

⇐ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
Dans ce cas :

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$$

Ainsi, α est une racine de P .

⇒ Supposons que α est une racine de P . On a ainsi $P(\alpha) = 0$.

* 1^{er} cas : Si P est la polynôme nulle, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = (x - \alpha) \times 0$$

* 2^{ème} cas : Si P est une fonction polynomiale de degré 0, elle n'a pas de racine.

* 3^{ème} cas : Si P est une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 1 :

Notons $n = \deg(P)$. Il existe alors des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $a_n \neq 0$.

Ainsi, puisque $P(\alpha) = 0$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k && \swarrow \text{par linéarité de la somme} \\ &= a_0(x^0 - \alpha^0) + \sum_{k=1}^n a_k(x^k - \alpha^k) && \swarrow x^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k(x^k - \alpha^k) && \swarrow \text{lemme précédent} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(a_k(x - \alpha) \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i} \right) \\ &= (x - \alpha) \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i} \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}$ est, par définition, une fonction polynomiale.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la fonction $x \mapsto a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i}$ est une fonction polynomiale.

Et donc, la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \alpha^{k-1-i} \right)$ est une somme de fonctions polynomiales, c'est donc une fonction polynomiale.

Conclusion : il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Remarque

La démonstration fournit même l'expression de Q , même si, en pratique, elle ne nous sera pas utile.

★

En pratique, ce théorème est très important dans la recherche des racines d'une fonction polynomiale :

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer les racines et une factorisation d'une fonction polynomiale P :

1. Si $\deg(P) = 1$: on sait faire depuis longtemps déjà...
2. Si $\deg(P) = 2$: se référer au théorème 1.
3. Si $\deg(P) \geq 3$:
 - on regarde si on connaît une racine α de P ; sinon, on en cherche une *évidente* parmi les nombres $-2; -1; 0; 1; 2; \dots$
 - une fois une racine α trouvée, on factorise de tête $P(x)$ par $x - \alpha$: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$;
 - on réitère le procédé sur la fonction polynomiale Q , qui est de degré $\deg(P) - 1$...

EXEMPLE 1

E1 Déterminons la forme factorisée en produit de fonctions polynomiales de plus petits degrés, de la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$.

Pour terminer, des résultats parfois utiles :

THÉORÈME 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Toute fonction polynomiale de degré n admet au plus n racines.
2. Si une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_n[x]$ admet au moins $n + 1$ racines (en comptant leurs multiplicités), alors

Remarque

En particulier, si une fonction polynomiale admet une infinité de racines, c'est la fonction polynomiale nulle.

c'est la fonction polynomiale nulle.

3. Deux fonctions polynomiales sont égales si, et seulement si, elles ont même degré et mêmes coefficients.

★ DÉMONSTRATION :

1. Par récurrence sur n .

2. D'après ce qui précède, une fonction polynomiale non nulle de $\mathbb{R}_n[x]$ possède au plus n racines (soit elle est constante et elle n'en a pas, soit elle est non constante et elle en a au plus n)... Si elle en a au moins $n + 1$, alors elle est nécessairement nulle.
3. Ce résultat découle directement du précédent... On veut démontrer une équivalence, on raisonne donc par double-implication.

⇐ Immédiat !

⇒ Soient deux fonctions polynomiales P et Q non nulles.
Il existe alors des réels $a_0, a_1, \dots, a_{\deg(P)}$ (avec $a_{\deg(P)} \neq 0$) et $b_0, b_1, \dots, b_{\deg(Q)}$ (avec $b_{\deg(Q)} \neq 0$) tels que

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k x^k ; \quad Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{\deg(Q)} b_k x^k$$

On pose $d = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k ; \quad Q(x) = \sum_{k=0}^d b_k x^k$$

avec éventuellement : $\forall k \in [\deg(P) + 1; d], a_k = 0$ ou $\forall k \in [\deg(Q) + 1; d], b_k = 0$.

D'où :

$$\begin{aligned} P = Q &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = Q(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^d a_k x^k = \sum_{k=0}^d b_k x^k \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^d (a_k - b_k) x^k = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ par linéarité de la somme}$$

Or, cette dernière égalité *implique* que la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^d (a_k - b_k) x^k$ possède une infinité de racines (tous les réels) : c'est donc, d'après le point précédent, la fonction polynomiale nulle.

Par conséquent : $\forall k \in [0; d], a_k - b_k = 0$.

Autrement dit :

$$\forall k \in [0; d], a_k = b_k$$

Conclusion : les fonctions polynomiales P et Q ont donc le même degré et les mêmes coefficients.

★

Remarque

Si l'une des deux (P ou Q) est nulle, le résultat se résume à la définition de la fonction polynomiale nulle !

Remarque

On perd l'équivalence à cause de ce "implique"... Mais il n'était pas nécessaire de la conserver, puisque l'on veut simplement montrer une implication !

En fait, la notion formelle de **polynôme** est souvent indépendante de la notion de fonction. En effet, pour que la quantité

$\sum_{k=0}^n a_k X^k$ existe, il suffit que les opérations suivantes soient valides sur l'objet mathématique X :

- puissances (et donc "multiplication" de X avec lui-même) de X ;
- multiplication de X par un réel ;

Vocabulaire

Si P et Q sont deux polynômes, on dit que $\frac{P}{Q}$ est une **fraction rationnelle** (fonction rationnelle dans le cas d'un quotient de deux fonctions polynomiales).

- addition de puissances de X entre elles.

Il arrivera donc que l'on parle du polynôme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ où X est appelée **indéterminée** et désigne un quelconque objet

mathématique sur lequel les opérations nécessaires à l'existence de cette écriture sont valides. En particulier, X pourra (selon les cas) être remplacé par un réel, une matrice, une fonction... En revanche, tout ce qui a été vu dans ce chapitre se généralise aux polynômes *formels* puisque les résultats ont été établis indépendamment du fait que x désignait un nombre réel (en dehors de la partie sur la fonction polynomiale dérivée...)...

Remarque

Le cas où X désigne un réel est en fait le cas dans lequel nous sommes placés dans ce chapitre.

On note : $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes ; et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .