

**EXERCICES DU CHAPITRE 10**  
FONCTIONS POLYNOMIALES**EXERCICE 1 - ●●○ - Recherche de racines & factorisation**

Dans chaque cas, déterminer la forme factorisée de  $P$  en produits de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

1.  $P : x \mapsto x^3 - 8$
2.  $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
3.  $P : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
4.  $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
5.  $P : x \mapsto x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$
6.  $P : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$

**EXERCICE 2 - ●●○ - Racine double**

Soient  $P$  une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \end{array} \right\} \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] / \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$$

**EXERCICE 3 - ●●○ - Division euclidienne**

On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $a_n$  et  $b_n$  et une fonction polynomiale  $Q_n$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x^n = (x^2 + x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n \quad (*)$$

Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 4 - ●●○ - Fonction polynomiale nulle ?**

Soit  $P$  une fonction polynomiale telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x+1) = P(x)$ .

Démontrer que si  $P$  admet une racine, alors  $P$  est nulle.

**EXERCICE 5 - ●●○ - Suite de fonctions polynomiales**

On considère la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions polynomiales définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $P_n$ .

**EXERCICE 6 - ●●● - Fonctions polynomiales de degré 2 paires**

1. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.
2. **2.a.** Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2 qui est paire et qui possède deux racines réelles distinctes notées  $x_1$  et  $x_2$ . Démontrer que  $x_1 = -x_2$ .  
**2.b.** Déterminer toutes les fonctions polynomiales de degré 2 qui sont paires et qui ne possèdent qu'une unique racine réelle.

**EXERCICE 7 - ●●● - Équations sur des fonctions polynomiales**

Dans chaque cas, déterminer les fonctions  $P \in \mathbb{R}[x]$  vérifiant la condition donnée.

1.  $P^2 = P$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$
3.  $P \circ P = P$ .