10

Algèbre linéaire

Diagonalisation des matrices carrées

Introduction...

Pour faire clair, l'objectif du chapitre : une matrice étant donnée, savoir si elle est semblable à une matrice diagonale et, le cas échéant, en déterminer une qui convient !

Pour bien démarrer...

1. Soient E et F deux espaces vectoriels réels. **Définitions.**
    - $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire lorsque : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

    - Endomorphisme ? Isomorphisme ? Automorphisme ?
        - ⋆ Un endomorphisme est une application linéaire dont l'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes.
        - ⋆ Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
        - ⋆ Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

    - Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
        - ⋆ Tout sur $\ker(f)$:
            - ◇ Définition : $\ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_E\}$
            - ◇ $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
            - ◇ f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$

        - ⋆ Tout sur $\operatorname{Im}(f)$:
            - ◇ Définition : $\operatorname{Im}(f) = \{u \in F \ / \ \exists x \in E \ / \ y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in E\}$
            - ◇ $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
            - ◇ f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im}(f) = F$
            - ◇ f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$ (où $\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$)
            - ◇ Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$.

2. **Théorème du rang et application pour la caractérisation des isomorphismes.**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
    - **Théorème du rang.** On a : $\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big)$.

    - **Caractérisation des isomorphismes.** Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors

$$\begin{tikzcd} f \text{ injective} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & f \text{ surjective} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

et donc :
Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors

$$\begin{tikzcd} \ker(f) = \{0_E\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \operatorname{rg}(f) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & f \text{ bijective} & \end{tikzcd}$$

3. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et injective, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$
Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et surjective, alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$
Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire et bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$

4. Formules de changement de base :
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
    - Pour tout $x \in E$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

    - Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'} \\ &= P^{-1}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'} \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'} \\ &= P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P^{-1}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} \end{aligned}$$

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tout ce qui suit dans le chapitre concerne les matrices carrées. Toutes les notions peuvent être formulées sur les endomorphismes, mais cela n'est plus dans l'esprit du programme de Mathématiques Appliquées. Volontairement, le cours sera conforme au programme, mais les exercices traités pourront utiliser le même vocabulaire sur les endomorphismes.

I Éléments propres d'une matrice carrée

I.1 Définitions et premiers résultats

Définitions 1 — Valeurs propres, vecteur propres et spectre d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est **valeur propre de A** lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

- ✓ $X \neq 0_{n,1}$
- ✓ $AX = \lambda X$

Un tel vecteur X est un **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ**

D2 Le **spectre de A**, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

Important ! La condition $X \neq 0_{n,1}$ est nécessaire, sinon tous les réels seraient valeur propre de toutes les matrices...

♣ Méthode 1 ♣ Pour montrer qu'un vecteur X est vecteur propre de A :

- on vérifie que $X \neq 0_{n,1}$,
- on calcule AX pour l'écrire sous la forme qqch $\times$ X, le qqch étant alors une valeur propre de A.

Exemple 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrons que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

On a :

✓ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$

✓ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : 2 est valeur propre de A et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Propriétés 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. On note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$.

P1 $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

P2 $1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant n$

P3 Des caractérisations :

$$\begin{aligned} \left(\lambda \text{ est valeur propre de } A\right) &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \neq n \\ &\iff \left(A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\right) \end{aligned}$$

P4 Si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même spectre et les dimensions de leurs sous-espaces propres sont égales.

✘ Attention ! $E_\lambda(A)$ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres associés à λ... C'est l'ensemble constitué du **vecteur nul et de tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ**.

Vocabulaire $E_\lambda(A)$ est le **sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ**.

✘ Attention ! Elles n'ont, en général, pas les mêmes vecteurs propres !

⋆ Démonstration :

P1. Remarquons que :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\}$$

$$= \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - I_n)X = 0_{n,1}\}$$
$$= \ker(A - I_n)$$

À retenir...
$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$
En particulier : $E_0(A) = \ker(A)$

Conclusion : $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

P2. • Puisque $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$$

Autrement dit :

$$\dim\big(\mathbb{E}_\lambda(A)\big) \leqslant n$$

• Ensuite, puisque λ est valeur propre de A, la matrice A possède au moins un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Par conséquent :

$$E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$$

D'où :

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) > 0$$

Autrement dit :

$$\dim\big(\mathbb{E}_\lambda(A)\big) \geqslant 1$$

Conclusion : $1 \leqslant \dim\big(E_\lambda(A)\big) \leqslant n$.

P3. On a :

$$\begin{aligned}
\big(\lambda \text{ est valeur propre de } A\big) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ \big(X \neq 0_{n,1} \text{ ET } X \in \ker(A - \lambda I_n)\big) \\
&\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\
&\iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n && \text{triangle d'inversibilité des matrices} \\
&\iff \big(A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\big)
\end{aligned}$$

P4. Supposons que A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que nous considérons ensuite, telle que $A = PBP^{-1}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible et que P et P^{-1} le sont, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(B - \lambda I_n) &= \operatorname{rg}\big(P(B - \lambda I_n)P^{-1}\big) \\
&= \operatorname{rg}(PBP^{-1} - \lambda P I_n P^{-1}) \\
&= \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

• d'après la propriété précédente :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{Sp}(B) &\iff \operatorname{rg}(B - \lambda I_n) \neq n \\
&\iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \neq n \\
&\iff \lambda \in \operatorname{Sp}(A)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$$

• et, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$:

$$\begin{aligned}
\dim\big(E_\lambda(A)\big) &= \dim\big(\ker(A - \lambda I_n)\big) && \text{théorème du rang} \\
&= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) && \text{ce qui précède} \\
&= n - \operatorname{rg}(B - \lambda I_n) && \text{théorème du rang} \\
&= \dim\big(\ker(B - \lambda I_n)\big) \\
&= \dim\big(E_\lambda(B)\big)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

⋆

♣ Méthode 2 ♣ **Pour déterminer une base de $E_\lambda(A)$,** on peut :

1. résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
2. ou déterminer la dimension de $E_\lambda(A)$ puis trouver une famille libre de bon cardinal...

Exemple 2

Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. D'après l'exemple précédent, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Déterminons, deux deux façons différentes, une base de $E_2(A)$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = 2X &\iff (A - 2I_3)X = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} -3x - 2y + 3z = 0 \\ x \quad\quad - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -3x - 2y + 3z = 0 \\ -2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est ainsi :

- ✓ génératrice de $E_2(A)$,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_2(A)$.

♡ Astuce du chef ! ♡

Remarquer la combinaison linéaire $C_1 + 0C_2 + C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A - 2I_3$...
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :
$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff$
$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - 2I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) && C_1 = -C_3 \text{ (donc } C_1 + C_3 = 0) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) && \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires} \\
&= 2
\end{aligned}$$

☞ Rappel...

Le rang d'une famille libre est égal à son cardinal.

Et on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3)$.

Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}(A - 2I_3) + \dim\left(\ker(A - 2I_3)\right)$$

Petite remarque

Ici, on savait déjà que ce vecteur était dans $E_2(A)$. Mais si on avait observé deux combinaisons linéaires différentes, on aurait pu trouver un autre vecteur !

D'où :

$$\dim\left(E_2(A)\right) = 1$$

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $E_2(A)$ qui est :

- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
- ✓ de cardinal 1 égal à la dimension de $E_2(A)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_2(A)$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour déterminer les valeurs propres de A :**

1. si A est triangulaire (ou diagonale), alors ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux ;
2. si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on utilise le déterminant pour trouver les réels λ tels que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ;
3. sinon, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver les réels λ tels que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ n'est pas maximal (on se ramène au rang d'une matrice triangulaire).

Exemples 3

E1 Les matrices suivantes admettent toutes 0 comme valeur propre : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Important !
0 est VP de A ssi A n'est pas inversible.

E2 Déterminons le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☞ Rappel...
Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors : M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\
&\iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\
&\iff \begin{cases} 2 - \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ 2 - \lambda = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Sp}(A) = \{1;3\}$.

E3 La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet aucune valeur propre...

E4 Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (1+\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + M_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-\lambda^2 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_2 \leftarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Petite remarque
Une fois le spectre trouvé, on peut repartir de cette égalité pour donner immédiatement le rang des matrices $A - 2I_3$ et $A - I_3$...

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire, on a : $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \neq 3 \iff \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ 1-2\lambda+\lambda^2 = 0 \end{cases}$

Conclusion : $\mathrm{Sp}(A) = \{1;2\}$.

E5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrons que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.

À retenir...
Résultat qui peut servir.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \neq n \\
&\iff \mathrm{rg}\left({}^t(A - \lambda I_n)\right) \neq n && \text{le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée} \\
&\iff \mathrm{rg}({}^tA - \lambda I_n) \neq n && \text{linéarité de la transposition} \\
&\iff \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tA)
\end{aligned}$$

I.2 Polynôme annulateur et valeurs propres

Voyons maintenant une notion accompagnée d'un résultat qui nous sera, en pratique, très utile.

Définition 2 — Polynôme annulateur d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Le polynôme P est **annulateur de A** lorsque : $P(A) = 0_n$.

Exemple 4

Après calculs, on trouve que le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent :

$$A^2 - A - 2I_3 = 0_3$$

D'où :

$$A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$$

Conclusion : la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

Peut-on donner un autre polynôme annulateur de A ?
Évidemment : $X(X^2 - X - 2)$ est encore annulateur de A, tout comme $(X - 43)(X^2 - X - 2)$, $(X + 17)(X^2 - X - 2)$, $(X^{17} - 43X + \pi)(X^2 - X - 2)$...

✓ Rigueur !
$\cancel{\frac{A - I_3}{2}}$: cette écriture n'a aucun sens !

✗ Attention !
On dira donc toujours UN **polynôme annulateur** de A.

Petite remarque
Au moins un et donc une infinité ! En effet, si P est annulateur de A, alors pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, QP est encore annulateur de A...

Théorème 1 — Existence de polynôme annulateur (HP)

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ est de cardinal $n^2 + 1$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2, cette famille ne peut pas être libre.
Il existe donc des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A_k = 0_n$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$ est ainsi non nul et annulateur de A. D'où le résultat. ⋆

☞ Rappels...
Soient E un EV de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
- Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$

☞ Pour info...
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède même un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à n, mais c'est moins rapide à démontrer !

Propriété 2 — Lien valeur propre / polynôme annulateur

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Si P est annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine de P.
Autrement dit, si P est annulateur de A, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{r \in \mathbb{R} \ / \ P(r) = 0\}$.
Ou encore : si P est annulateur de A, alors les valeurs propres de A sont parmi les racines de P.

✗ Attention !
On a seulement une inclusion ! Toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas nécessairement des valeurs propres de A... Sinon, tout réel serait valeur propre de A.

Démonstration : Supposons que P est un polynôme annulateur non nul de A.

Notons $d = \deg(P)$ et considérons $a_0, \ldots, a_d$ les réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrons que $P(\lambda) = 0$.
Puisque λ est valeur propre de A, il existe ainsi un vecteur $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, que l'on considère ensuite, tel que $AV = \lambda V$.
Dans ce cas :

$$P(A)V = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) V$$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k A^k V$$

par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k V = \lambda^k V$

Confusion d'objets !
$P(A)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...
$P(\lambda)$ est un réel

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k V$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k \right) V$$
$$= P(\lambda) V$$

Mais P est annulateur de A, donc $P(A) = 0_n$ et ainsi $P(A)V = 0_{n,1}$. Par conséquent :

$$P(\lambda)V = 0_{n,1}$$

Or $V \neq 0_{n,1}$, donc $P(\lambda) = 0$.

⋆

♣ **MÉTHODE 4** ♣ **Pour déterminer les valeurs propres de A :**
Si l'énoncé fait apparaître un polynôme annulateur de A, alors :

- on cherche les racines de ce polynôme,
- pour chaque racine r trouvée :
  - ⋆ soit on résout $AX = rX$, et si l'ensemble des solutions est non réduit au vecteur nul, alors r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - ⋆ soit on justifie / on voit que la matrice $A - rI_n$ n'est pas inversible, et dans ce cas, r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - ⋆ soit on trouve un vecteur non nul X tel que $AX = rX$, et dans ce cas, r est valeur propre de A.

Important !
L'évènement "l'énoncé donne un polynôme annulateur dont une racine n'est pas valeur propre de A" est quasi-impossible.
En pratique, l'énoncé fournit le *meilleur* polynôme annulateur qui soit...

EXEMPLE 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on admet que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$.

Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est donc annulateur de la matrice A.
  On remarque que 1 est racine de ce polynôme, puis :
  $$X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X^2 - 4X + 4)$$
  $$= (X-1)(X-2)^2$$
  Conclusion : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1; 2\}$.
- Pour 1 :
  $$\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}\right)$$
  $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$, donc $C_3 = -C_1 - C_2$
  $$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}\right)$$
  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires
  $$= 2$$
  On en déduit que 1 est valeur propre de A et, par théorème du rang, en notant $E_1(A) = \ker(A - I_3)$, on obtient :
  $$\dim\left(E_1(A)\right) = 1$$
  On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.
  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_1(A)$ qui est :
  - ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
  - ✓ de cardinal égal à la dimension de $E_1(A)$.

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.
- Pour 2 :
  $$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}\right)$$
  $C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 0_{3,1}$, donc $C_1 = -2C_2 - 4C_4$

$$= \text{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$
$$= 2$$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires

On en déduit que 2 est valeur propre de A et, par théorème du rang, en notant $E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$, on obtient :

$$\dim\left(E_2(A)\right) = 1$$

On remarque ensuite que $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \in E_2(A)$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_2(A)$ qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
✓ de cardinal égal à la dimension de $E_2(A)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$.

I.3 Nombre maximal de valeurs propres

Propriétés 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) les valeurs propres **distinctes** de A.

P1 **Cas particulier.** Soient $X_1, \ldots, X_p$ des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, la famille $(X_1, \ldots, X_k)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

P2 **Cas général.** Soient $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_p$ des familles libres respectivement de $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$.
Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, la concaténation des familles $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

À retenir...
• Une famille de $\overrightarrow{\text{VP}}$associés à des VP différentes est libre.
• Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

⋆ Démonstration :

P1. Par récurrence...

Petite remarque
Il s'agit d'une récurrence finie.

- **Initialisation.** Pour $k = 1$:
  Par définition, puisque X_1 est vecteur propre de A, on a $X_1 \neq 0_{n,1}$.
  Par conséquent, la famille (X_1) est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons que "$(X_1, \ldots, X_k)$ est libre" et montrons que "$(X_1, \ldots, X_{k+1})$ est libre".
  Soient $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$. Supposons que $a_1X_1 + \ldots + a_{k+1}X_{k+1} = 0_{n,1}$. Notons $(\star)$ cette égalité.
  - ⋆ Multiplions $(\star)$ par $A - \lambda_{k+1}I_n$. On obtient, puisque X_{k+1} est vecteur propre de A pour la valeur propre λ (et donc $X_{k+1} \in \ker(A - \lambda_{k+1}I_n)$) :

    $$\sum_{i=1}^{k} a_i(A - \lambda_{k+1}I_n)X_i = 0_{n,1}$$

    D'où :

    $$\sum_{i=1}^{k} a_i(AX_i - \lambda_{k+1}X_i) = 0_{n,1}$$

    Et comme, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, X_i est vecteur propre de A pour la valeur propre λ_i :

    $$\sum_{i=1}^{k} a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1})X_i = 0_{n,1}$$

    Mais, par hypothèse de récurrence, la famille $(X_1, \ldots, X_k)$ est libre. D'où :

    $$\forall i \in [\![1;k]\!], \;\; a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$$

    Et comme les valeurs propres sont distinctes, on a :

    $$\forall i \in [\![1;k]\!], \;\; \lambda_i \neq \lambda_{k+1}$$

    Ce qui donne donc :

    $$\forall i \in [\![1;k]\!], \;\; a_i = 0$$

⋆ Par conséquent, ($\star$) équivaut à

$$a_{k+1}X_{k+1} = 0_{n,1}$$

Et comme $X_{k+1} \neq 0_{n,1}$ (c'est un vecteur propre...), on obtient :

$$a_{k+1} = 0$$

On a donc établi :

$$\forall i \in [\![1;k+1]\!],\ \ a_i = 0$$

La famille $(X_1, ..., X_{k+1})$ est donc libre. L'hérédité est ainsi établie.

P2. Analogue, mais plus lourd à écrire.

⋆

Propriétés 4 — Nombre maximal de valeurs propres (HP ?)

P1 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

P2 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. On a :

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leqslant n$$

Autrement dit : On dit parfois qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres *comptées avec leur multiplicité géométrique*, la multiplicité géométrique (il existe aussi une multiplicité algébrique, hors programme) d'une valeur propre désignant la dimension de l'espace propre associé.

⋆ Démonstration :

P1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons p le nombre de valeurs propres distinctes de A et $X_1, ..., X_p$ des vecteurs propres associés à ces p valeurs propres respectivement.
D'après la propriété précédente, la famille $(X_1, ..., X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\mathrm{Card}\left(X_1, ..., X_p\right) \leqslant \dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)$$

D'où :

$$p \leqslant n$$

☞ Rappel... Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
• Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$.
• Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$.

P2. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$. Puisqu'une base est en particulier une famille libre, d'après la propriété précédente (cas général), la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, ..., \mathscr{B}_p$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $\mathscr{F}$ cette famille libre obtenue par concaténation. On a ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$$

Mais, puisque $\mathscr{F}$ est la concaténation des familles $\mathscr{B}_1, ..., \mathscr{B}_p$, on a également :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathscr{F}) &= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(\mathscr{B}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right)\end{aligned}$$

pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(A)$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leqslant n$.

⋆

Petite remarque P1 est un cas particulier de P2. En effet, puisque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \geqslant p$. Et par transitivité, on retrouve : $p \leqslant n$.

♣ Méthode 5 ♣ Pour déterminer quelques valeurs propres de A :

1. si A n'est pas inversible (on le remarque si A admet une ligne/colonne nulle ou une ligne/colonne combinaison linéaire des autres ; ou si si $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$ ou si $\mathrm{rg}(A) \neq n$), alors 0 est valeur propre de A ;
2. si la somme des coefficients de chacune des lignes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A et $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
3. puisque $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$, si la somme des coefficients de chacune des colonnes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A (mais nous n'avons pas d'expression générale d'un vecteur propre associé) ;
4. si A est carrée de taille n et que l'on connait déjà $n-1$ valeurs propres de A, alors la dernière s'obtient en soustrayant la somme des VP déjà trouvées à la somme des coefficients diagonaux de A (la trace de A).

✘ Attention !
• Il est rare de pouvoir trouver toutes les valeurs propres d'une matrice de cette façon...
• La notion de trace d'une matrice est hors programme et le point 4 également. En pratique, on pourra en revanche écrire : "on remarque que ... est VP de A, car ... [utilisation de la caractérisation des valeurs propres]".

Exemple 6

Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé sans résoudre aucun système.

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A dans l'ordre de lecture.

- Puisque $C_2 = -2C_1$, la matrice A n'est pas inversible.

  Donc 0 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

- Ensuite, remarquons que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc 1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

- Enfin, en notant C_1', C_2', C_3' les colonnes de $A - 2I_3$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - 2I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) && C_2' = -2C_3 + 2C_1 \text{ (donc } 2C_1 - C_2' - 2C_3' = 0_{3,1}) \\ &= \operatorname{rg}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) && \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sont non colinéaires} \\ &= 2 \end{aligned}$$

  Par conséquent, 2 est valeur propre de A et, puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_2)$, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

Puisque A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet au plus 3 valeurs propres distinctes. Nous en avons trouvé 3.
Par conséquent :

$$\operatorname{Sp}(A) = \{0; 1; 2\}$$

Et, par saturation des dimensions (conséquence de Propriétés 4 - P2), chaque espace propre associé est de dimension égale à 1 ; on en déduit donc que chaque vecteur propre donné fournit une base du sous-espace propre associé.

Petite remarque
Il n'est même pas nécessaire de donner la valeur du rang... Du moment que celui-ci n'est pas 3 (que la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible), 2 sera VP de A.

II Diagonalisation des matrices carrées

Définition 3 — Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est **diagonalisable** lorsqu'il existe deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

- ✓ P est inversible,
- ✓ D est diagonale,
- ✓ $A = PDP^{-1}$

Autrement dit :
Une matrice est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

☞ Pour info...
Un endomorphisme f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Théorème 2 — Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Et, dans ce cas, si :

- ✓ D est diagonale constituée des valeurs propres de A (dans l'ordre des vecteurs propres correspondant dans ladite base),
- ✓ P est la matrice de passage de la base canonique vers cette base de vecteurs propres de A,

alors : $A = PDP^{-1}$.

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication et travaillons avec les applications linéaires... Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est diagonalisable et considérons deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux (rangés de haut en bas dans cet ordre) de D. Puisque les matrices A et D sont semblables, d'après la propriété 4, elles représentent toutes deux le même endomorphisme.

♡ Astuce du chef ! ♡
L'avantage de travailler avec l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et pas celui d'un autre EV : les objets sont les mêmes !
En effet, f n'est autre que l'application $X \longmapsto AX$. Et ainsi, les vecteurs propres de f sont exactement les vecteurs propres de A...

Par conséquent, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Mais, D étant diagonale, on obtient :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Or $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc, nécessairement, les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont tous non nuls.
On en déduit que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, λ_i est valeur propre de f (et donc de A) et que e_i est un vecteur propre de f (et donc de A) associé à la valeur propre λ_i.
Conclusion : $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Considérons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une telle base et, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, notons λ_i la valeur propre à laquelle est associé le vecteur propre e_i.
On a ainsi :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Petite remarque
Les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distinctes !

Et ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

☞ Rappel...
Se souvenir de la manière dont on remplit une matrice...

Notons alors $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathrm{bc},\mathscr{B}}$. D'après la formule de changement de base (propriétés 3 - P2), on a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{bc}(f) &= P_{\mathrm{bc},\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathrm{bc}} \qquad P_{\mathscr{B},\mathrm{bc}} = P^{-1}_{\mathrm{bc},\mathscr{B}} \\ &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$A = PDP^{-1}$$

Conclusion : A est diagonalisable.

⋆

Exemple 7

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple 6. Montrons que A est diagonalisable et donnons une matrice P inversible ainsi qu'une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

- En reprenant ce qui a été fait dans l'exemple 6, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ (que l'on note $\mathscr{B}$ ensuite) est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :
  - ✓ libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes (propriétés 3),
  - ✓ de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

  Par conséquent, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
  La matrice A est donc diagonalisable et, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a (théorème 2) :
  - ✓ P est inversible (comme matrice de passage),
  - ✓ D est diagonale,
  - ✓ $A = PDP^{-1}$.

✘ Attention !
On veille bien à l'ordre dans lequel sont rangés les valeurs propres dans D et les vecteurs propres correspondant dans P...

Théorème 3 — Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée (HP)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

⋆ **Démonstration :** Supposons que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Notons, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i ; et notons également $\mathscr{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
On sait que la famille $\mathscr{B}$ est :

- ✓ libre car constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (propriétés 3),
- ✓ de cardinal n égal à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Conclusion : la matrice A est diagonalisable.

Important !
Il faut savoir refaire le raisonnement mis en place !

⋆

Théorème 4 — **Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée (HP)**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. On a :

$$\big(A \text{ diagonalisable}\big) \iff \sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = n$$

☞ Pour info...

C'est un théorème très important, qui sert également pour démontrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable. Mais il est HP.

Démonstration : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = n$.

Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$. Puisqu'une base est en particulier une famille libre, d'après les propriétés 6 (cas général), la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathscr{F}$ cette famille libre obtenue par concaténation.
Mais, puisque $\mathscr{F}$ est la concaténation des familles $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_p$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\mathscr{F}) &= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(\mathscr{B}_i) && \text{pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ \mathscr{B}_i \text{ est une base de } E_{\lambda_i}(A)\\
&= \sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)\\
&= n
\end{aligned}$$

Par conséquent :

- ✓ $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
- ✓ $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de A.
Conclusion : d'après le théorème 2, A est diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est diagonalisable. D'après le théorème 2, il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une telle base. Quitte à réordonner $\mathscr{B}$, on peut supposer que :

- ⋆ $\mathscr{F}_1 = (e_1, \ldots, e_{n_1})$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_1,
- ⋆ $\mathscr{F}_2 = (e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_2,
- ⋆ ...
- ⋆ $\mathscr{F}_p = (e_{n_1+n_2+..+n_{p-1}+1}, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ_p

Autrement dit :

Les n_1 premiers vecteurs de $\mathscr{B}$ forment une famille de $\overrightarrow{\text{VP}}$associés à λ_1, les n_2 suivant forment une famille de $\overrightarrow{\text{VP}}$associés à λ_2, ..., les n_p derniers forment une famille de $\overrightarrow{\text{VP}}$associés à λ_p.

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, elle est en particulier libre. Ainsi, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\mathscr{F}_i$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc de $E_{\lambda_i}(A)$.
D'où :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Card}(\mathscr{F}_i) \leqslant \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)$$

☞ Rappels...

- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Puis, en sommant :

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(\mathscr{F}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)$$

Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{p} n_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big)$$

Or :

- ⋆ d'après propriétés 7 - P2 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) \leqslant n$
- ⋆ par définition des $\mathscr{F}_i$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = n$

D'où :

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) \leqslant n$$

Petite remarque

On pourrait également voir le théorème 3 comme un cas particulier du théorème 4... En effet, si $p = n$, alors, puisque chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1 et que (propriétés 7) la somme des dimensions est inférieure ou égale à n ; on obtient nécessairement que chaque sous-espace propre est de dimension exactement 1.
Par conséquent, la somme des dimensions vaut n... et donc A est diagonalisable.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim\big(E_{\lambda_i}(A)\big) = n$.

⋆

Propriété 5 — **Cas d'une unique valeur propre (HP)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ diagonalisable} \\ A \text{ possède une unique valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \lambda I_n$$

★ Classique ! ★
Résultat classique, à savoir redémontrer très rapidement si besoin.

Autrement dit :
Une matrice diagonalisable avec une unique valeur propre est nécessairement multiple de l'identité (la réciproque est évidemment vraie).

Démonstration :
Supposons que A est diagonalisable et possède une unique valeur propre λ.
Il existe alors $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on considère ensuite, telles que :

- ✓ P est inversible,
- ✓ D est diagonale, constituée de λ, autrement dit, $D = \lambda I_n$,
- ✓ $A = PDP^{-1}$.

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} A &= P\lambda I_n P^{-1} \\ &= \lambda PP^{-1} \\ &= \lambda I_n \end{aligned}$$

Exemple 8

Puisque la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Cette matrice admet donc 3 comme unique valeur propre.
Par l'absurde : supposons que A est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} A &= P \times 3I_3 \times P^{-1} \\ &= 3PP^{-1} \\ &= 3I_3 \end{aligned}$$

Or, $A \neq 3I_3$: contradiction !

Conclusion : la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Théorème 5 — **Théorème spectral**

Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Démonstration : Nous manquons d'outils pour démontrer le cas général ; mais le cas $n = 2$ est facile ! En exercice ?

Exemple 9

Les matrices suivantes sont diagonalisables : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ pour tout réel a...

Exemple classique d'utilisation de la réduction (diagonalisation ou trigonalisation) d'une matrice A : le calcul simplifié des puissances de A. Mais dans quels types d'exercices peut-on rencontrer ceci ?