Exercices du chapitre 10
Diagonalisation des matrices carrées

Exercice 1 - ●●○○ - Diagonalisable ou pas ?
Dans chaque cas, étudier la diagonalisabilité de la matrice A et, le cas échéant, la diagonaliser.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - ●●○○ - Cas général...
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser la matrice $M(a)$.

Exercice 3 - ●●○○ - Théorème spectral dans le cas $n = 2$
Démontrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exercice 4 - ●●○○
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad ; \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Justifier que f est entièrement défini.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée A.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis une de $\ker(f)$.
4. En déduire une valeur propre de A ainsi que le sous-espace propre associé.
5. Démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 5 - ●●○○ - Avec des polynômes
On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+2) - P(x)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. 2.a. Soit $P \in \ker(f)$. Montrer que la fonction polynomiale $x \longmapsto P(x) - P(0)$ est nulle.
   2.b. En déduire que $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, notée A.
4. Calculer A^3 puis en déduire le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 - ●●○○ - Vrai ou faux ?
1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet au plus n vecteurs propres.
2. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.
3. Si deux matrices ont les mêmes valeurs propres, alors elles sont semblables.
4. Il existe des matrices n'ayant aucune valeur propre réelle.
5. Si A est diagonalisable, alors pour tout $k \in [\![2 ; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable.
6. Si, pour tout $k \in [\![2 ; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
7. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 7 - ●●○○ - Type écrit

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer $(A-2I_3)^2$ puis en déduire que $(A-2I_3)^3 = 0$.
2. Démontrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Déterminer le rang de $A - 2I_3$.
5. En déduire que 2 est valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre associé, noté E_2.
6. Posons $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$.
   - 6.a. Vérifier que $f(v) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.
   - 6.b. Résoudre l'équation $f(x) = 2x + v$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.
   - 6.c. Posons $w = (-1, 0, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - 6.d. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w), notée T, et expliciter une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n. On considérera la matrice N définie par $T = 2I_3 + N$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
9. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.
   - 9.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   - 9.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

   - 9.c. Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   - 9.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
10. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.
    - 10.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
    - 10.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

    - 10.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
    - 10.d. En déduire, à l'aide de la question 9.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
    - 10.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Exercice 8 - ●●○○ - EDHEC 2015 E

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et on f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 1.a. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   - 1.b. En déduire la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.
2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
   - 2.a. Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}$ puis $f(u-v)$ et $f(u+3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   - 2.b. En déduire les valeurs propres de C et préciser les sous-espaces propres associés.
   - 2.c. Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.
3. 3.a. Établir : $D(D+I_3)(D-3I_3) = 0$.
   - 3.b. En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est annulateur de C.
4. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On admet (principe de division euclidienne) qu'il existe un unique polynôme Q_n et trois uniques réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

   - 4.a. Déterminer l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   - 4.b. Déduire de ce qui précède une expression simple de C^n en fonction de C et C^2.
   - 4.c. L'expression obtenue est-elle valable si $n = 1$?

EXERCICE 9 - ●●○○ - EML 2016 E

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ainsi que $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. 3.a. Justifier que A est diagonalisable.
   3.b. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe la matrice AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. 9.a. Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
   9.b. En déduire que toute valeur propre λ de F vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   9.c. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.
12. 12.a. Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
    12.b. Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

EXERCICE 10 - ●●○○ - EDHEC 2013 E

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   1.a. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
   1.b. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}(f)$.
   1.c. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \ker(f)$.
2. On considère maintenant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. On note M la matrice canoniquement associée à g. L'objectif de la question est d'établir que $\mathrm{Im}(g^2) = \ker(g)$.
   2.a. 2.a.i. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.
        2.a.ii. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.
        2.a.iii. En déduire que la matrice M n'est pas diagonalisable.
   2.b. 2.b.i. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
        2.b.ii. Montrer que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.
        2.b.iii. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, notée N.
        2.b.iv. Déterminer alors une base de $\ker(g)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(g^2)$. Conclure.

EXERCICE 11 - ●●○○ - Une matrice utile en analyse numérique...

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On assimilera les matrices de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ aux réels.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. L'objectif de cette question est d'établir que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
   2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Quelle est la nature de ${}^tXAX$?

2.b. Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé. Exprimer ${}^tXAX$ en fonction de $\lambda, a, b, c, d, e, f$.

2.c. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAX$.

2.d. Déduire des deux questions précédentes que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 12 - ●●●○ - Matrices stochastiques

Définition 1 — **Matrice stochastique**

On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
2. Justifier que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.
3. Démontrer que si λ est valeur propre d'une matrice stochastique, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

   Indication : on pourra considérer un vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *associé à* λ *et* k *l'indice tel que* $|x_k| = \max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\right)$.

Exercice 13 - ●●●○ - Type oral

1. **Question de cours.** Définition de deux matrices semblables.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $2f - f^2 = \mathrm{id}$.
3. En déduire que f est un automorphisme et donner son automorphisme réciproque.
4. Déterminer l'unique valeur propre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
6. 6.a. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

   6.b. La résultat précédent est-il valable si $n \in \mathbb{Z}$?
7. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 - ●●●○ - Type oral (sans préparation)

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que NM est diagonalisable.

1. Montrer que si M est inversible, alors MN est aussi diagonalisable.
2. Trouver deux matrices non inversibles $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que NM soit diagonalisable et MN ne le soit pas.