



11

ANALYSE

LIMITES DE FONCTIONS

INTRODUCTION...

La notion de limite (historiquement introduite par l'étude des suites et des séries) a nécessité un travail conséquent et a suscité d'importants débats au sein de la communauté mathématique... On pouvait déjà voir, autour du III^{ème} siècle avant Jésus-Christ : *"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées."*

Nous sommes au XVIII^{ème} siècle quand D'Alembert, Leibniz et Euler tentent une définition formelle de la notion de limite. Le calcul différentiel a déjà débuté, en lien avec l'astronomie et la mécanique, et les termes "infinitement petit", "infinitement grand", "infinitésimal" sont souvent utilisés de façon intuitive (via une approche visuelle ou géométrique) mais peu rigoureuse.

Le développement de l'analyse entraîne une volonté de rigueur mathématique sans précédent. Les récents travaux sur la géométrie prouvent qu'il n'est pas possible de construire les mathématiques sur une approche géométrique et intuitive. Par la suite, Cauchy donnera, au début du XIX^{ème} siècle, une définition plutôt satisfaisante de la limite ; mais la difficulté est ailleurs à cette époque : la définition même de l'ensemble des réels est imprécise et ne permet pas une définition parfaitement rigoureuse et unanime de limite. Quelques décennies plus tard, après le travail de Bernhard Bolzano (1781-1848, tchèque) resté dans l'ombre, les travaux de Karl Weierstrass (1815-1897, allemand) mettent le point final à la construction de $\mathbb{R}$ et fournissent ainsi une définition rigoureuse de continuité d'une fonction et de la limite, à l'aide des fameux epsilon (cette définition est sensiblement celle utilisée actuellement).

Définition de limite par Cauchy : *"Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres."*

I LIMITES EN UN RÉEL

Dans cette partie, I désigne un intervalle borné de $\mathbb{R}$, x_0 est un réel de I ou une extrémité de I et f une fonction définie sur I (sauf éventuellement en x_0 (sera précisé dans les énoncés)).

Remarque

Tout peut être étendu dans le cas où $x_0 \in I$ et f n'est pas définie en x_0 , il faut juste adapter légèrement les écritures (écrire $I \setminus \{x_0\}$ au lieu de I en gros).

I.1 LIMITE FINIE EN UN RÉEL

DÉFINITIONS 1

LIMITE FINIE EN UN RÉEL

D1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que **f a ℓ pour limite en x_0** (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

D2 On dit que **f a une limite finie en x_0** lorsqu'il existe un réel ℓ qui est limite de f en x_0 .

D3 On dit que **f a ℓ pour limite à gauche en x_0** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0[\implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

D4 On dit que **f a ℓ pour limite à droite en x_0** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, (x \in]x_0; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

En gros...

f tend vers ℓ en x_0 lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un x suffisamment proche de x_0 .

Remarques

- De façon équivalente, $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \rightarrow x_0$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in I \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- On peut montrer qu'il est équivalent d'imposer $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ plutôt que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ dans la définition.

PROPRIÉTÉ 1

UNICITÉ DE LA LIMITE

Si f a une limite finie en x_0 , elle n'en a qu'une seule.

★ DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations, légèrement différentes.

1. Supposons que f a pour limite deux réels ℓ_1 et ℓ_2 en x_0 . Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Quitte à échanger ℓ_1 et ℓ_2 , on peut même supposer que $\ell_1 < \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $f(x)$ tend vers ℓ_1 et ℓ_2 en x_0 , donc il existe deux réels strictement positifs δ_1 et δ_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1] \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2] \implies |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ainsi :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon \text{ ET } |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies -\varepsilon \leq f(x) - \ell_1 \leq \varepsilon \text{ ET } -\varepsilon \leq f(x) - \ell_2 \leq \varepsilon)$$

Prenons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$. Puisque $\ell_1 < \ell_2$, on a $\varepsilon > 0$. Et on obtient :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies \frac{4\ell_1 - \ell_2}{3} \leq f(x) \leq \frac{2\ell_1 + \ell_2}{3} \text{ ET } \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3} \leq f(x) \leq \frac{4\ell_2 - \ell_1}{3})$$

Or $\ell_1 < \ell_2$, donc $\frac{2\ell_1 + \ell_2}{3} < \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3}$. D'où :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies f(x) < f(x)) \quad : \text{ absurde !}$$

Conclusion : $\ell_1 = \ell_2$.

2. Supposons que $f(x)$ tende vers ℓ_1 et ℓ_2 lorsque $x \rightarrow x_0$. Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $f(x)$ tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 lorsque $x \rightarrow x_0$, donc il existe deux réels strictement positifs δ_1 et δ_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1] \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2] \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon)$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ainsi :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon \text{ ET } |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon)$$

Pourquoi ?

Puisque δ est la plus petite valeur entre δ_1 et δ_2 , l'intervalle $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ est inclus dans les deux intervalles $[x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1]$ et $[x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2]$.

Rappel...

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Pourquoi ?

En supposant $\ell_1 \neq \ell_2$, on suppose donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour x proche de x_0 à δ -près, $f(x)$ est compris entre deux bandes centrées en ℓ_1 et ℓ_2 , de largeurs 2ε . Et on cherche un ε tel que ces deux bandes n'ont rien en commun !

Au passage, si on choisit $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ dans la définition quantifiée de convergence, alors prendre $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$ suffit à obtenir la contradiction !

Puis, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$,

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &= |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{inégalité triangulaire} \\ x \in I \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \end{array}$$

On a finalement établi :

$$\forall \varepsilon > 0, |\ell_1 - \ell_2| \leq 2\varepsilon$$

Conclusion : $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, d'où $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque

C'est l'exercice 8 du livre qui permet de conclure...

Notation

Le résultat et la démonstration sont encore valables dans le cas d'une limite latérale (gauche ou droite)...

On peut alors sans problème définir les notations suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou parfois : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ pour signifier que la limite de f en x_0 est ℓ
- limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $x < x_0$
- limite à droite : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $x > x_0$

PROPRIÉTÉS 2

LIEN ENTRE LES DIFFÉRENTES LIMITES

P1 Si $x_0 \in I$ et que $f(x_0)$ existe, alors :

" f a une limite en x_0 " $\iff$ " f a une limite à gauche **et** à droite en x_0 **et elles sont égales à $f(x_0)$** ".

P2 Si $x_0 \in I$ et si f n'est pas définie en x_0 , alors :

" f a une limite en x_0 " $\iff$ " f a une limite à gauche **et** à droite en x_0 **et elles sont égales**".

DÉMONSTRATION :

P1. Supposons $x_0 \in I$ et que $f(x_0)$ existe. Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que f a une limite en x_0 .

* Puisque f a une limite en x_0 , il existe $\ell \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\delta > 0$, que l'on considère ensuite, tel que

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

En particulier, pour $x = x_0$:

$$|f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a donc établi :

$$\forall \varepsilon > 0, |f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

D'où :

$$f(x_0) = \ell$$

Ainsi, si f admet une limite en x_0 et que $f(x_0)$ existe, on a nécessairement $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

* Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, il existe $\delta > 0$, que l'on considère ensuite, tel que

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

En particulier

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x \in I, (x \in]x_0; x_0 + \delta] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Conclusion : f a une limite à gauche **et** une limite à droite en x_0 et elles sont égales à $f(x_0)$.

$\Leftarrow$ Supposons que f a une limite à gauche **et** une limite à droite en x_0 et qu'elles sont égales à $f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, il existe δ_1 et δ_2 dans $\mathbb{R}^{+*}$, que l'on considère ensuite, tels que

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta_1; x_0] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x \in I, (x \in]x_0; x_0 + \delta_2] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Prenons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. On a ainsi :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \setminus \{x_0\} \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Et ce résultat est encore valable pour $x = x_0$... D'où :

$$\forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$$

Conclusion : f a une limite en x_0 , et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

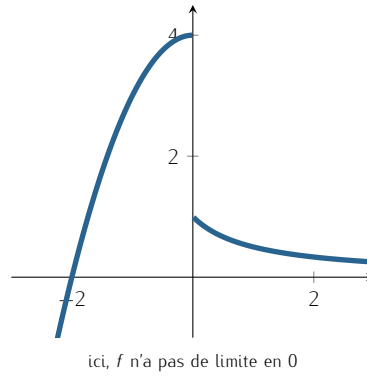
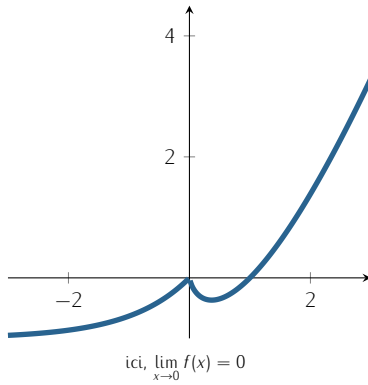
Remarque

Toujours avec l'exercice 8 du livre.

★Subtil...★

Et oui, cela implique donc la continuité de f en x_0 ... Cela est dû à la définition de limite choisie. Dans certains ouvrages de mathématiques, la définition de limite en x_0 est *épointée*, autrement dit, on demande $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$, et cela a un petit impact...

On remarquera d'ailleurs que les définitions de limites latérales sont, elles, épointées.

**Remarque**

Dans le premier cas, on ne voit même pas que f n'est pas dérivable en 0... Nous reverrons ce cas plus tard dans l'année !

EXEMPLES 1

E1 $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = (-2)^2 = 4$

E2 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$

E3 Considérons $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En revanche, pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)^2}{x - 1} \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

E4 Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} [x] = m - 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} [x] = m$.

E5 Démontrons que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ admet une limite en -1 .

E6 On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Cette fonction admet-elle une limite en 2 ?

Remarque

On ne démontrera pas ces résultats avec la définition quantifiée : gardons cela pour la suite du cours...

I.2 LIMITE INFINIE EN UN RÉEL

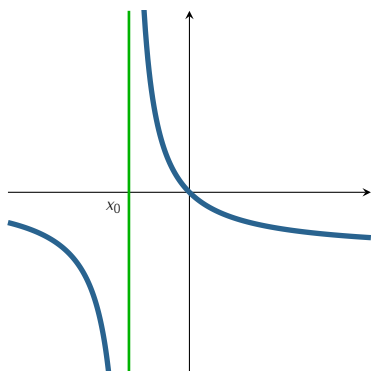
DÉFINITION 2

LIMITE INFINIE EN UN RÉEL

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 lorsque :

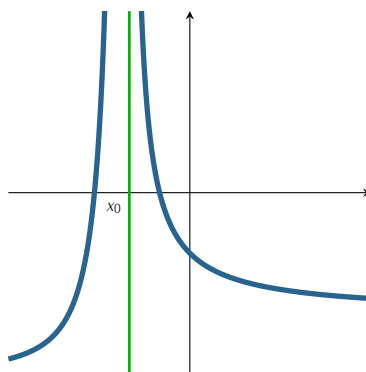
$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in I, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies f(x) \geq M)$$

limites à gauche et à droite infinies et différentes



ici, f n'a pas de limite en x_0

limites à gauche et à droite infinies et égales



ici, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

En gros...

f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un x suffisamment proche de x_0 .

Remarques

- Là encore, il y a unicité et on note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- Bien entendu, une définition analogue existe pour une limite égale à $-\infty$... Et aussi pour des limites infinies à gauche et à droite de x_0 .

Vocabulaire

Dans les deux cas, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote** ('verticale') à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de x_0 .

EXEMPLES 2

E1 Démontrons que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

E2 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe de la fonction $\ln$ au voisinage de 0.

E3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = \quad$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = \quad$.

Par conséquent, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a une limite en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \quad$. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.

II LIMITE EN L'INFINI

Dans cette partie, I est un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ et f une fonction définie sur I .

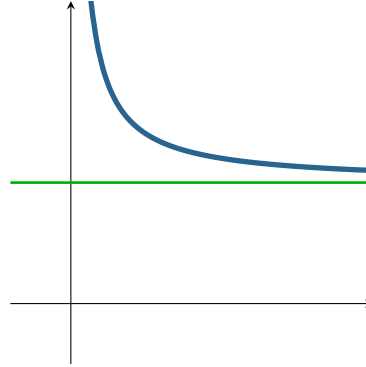
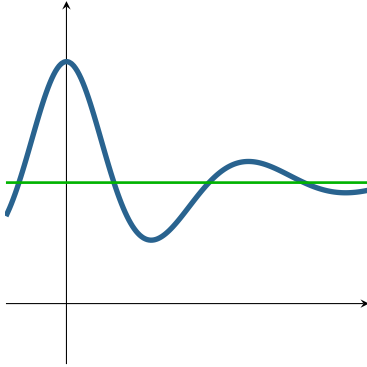
II.1 LIMITE FINIE EN L'INFINI

DÉFINITION 3

LIMITE FINIE EN L'INFINI

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$



En gros...

f tend vers ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un x suffisamment grand.

Remarques

- Là encore, il y a unicité et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.
- Bien entendu, une définition analogue existe pour une limite finie en $-\infty$...

Vocabulaire

Dans les deux cas, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** ('horizontale') à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

EXEMPLES 3

E1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de $\pm\infty$.

E2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 =$

La droite d'équation est asymptote à la courbe de la fonction $x \mapsto e^x + 1$ au voisinage de $-\infty$.

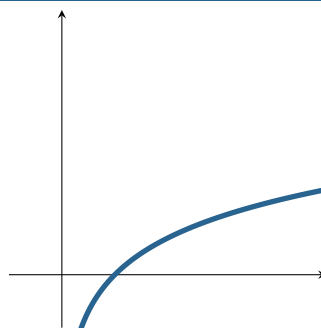
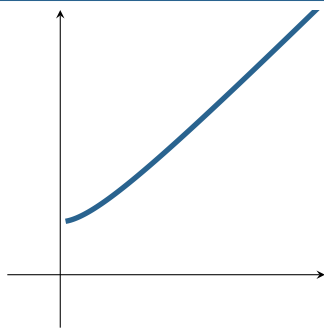
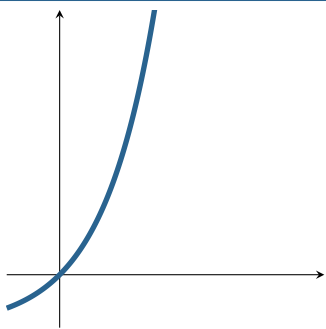
II.2 LIMITE INFINIE EN L'INFINI

DÉFINITION 4

LIMITE INFINIE EN L'INFINI

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall M > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies f(x) \geq M)$$



En gros...

f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un x suffisamment grand.

Remarques

- Là encore, il y a unicité et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- On définit de manière analogue : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

EXEMPLES 4

Tous les résultats ci-dessous doivent être parfaitement connus :

E1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

E2 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$

E3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

E4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

E5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

⚠ Attention !

Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$: c'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto (-1)^{[x]}$.

III LIMITES USUELLES & OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

PROPRIÉTÉS 3

LIMITES USUELLES

P1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est un entier pair, alors :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$$

- Si n est un entier impair, alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

P2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

P3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

P4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_*^+$ à l'aide de l'égalité : $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$... Et on a :

- Si $\alpha > 0$, alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

- Si $\alpha < 0$, alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

♥ Astuce du chef ♥

Bien connaître les courbes des fonctions usuelles permet de retrouver les limites.

* DÉMONSTRATION : Tout peut se démontrer en revenant aux définitions quantifiées des limites...

*

Voyons maintenant le comportement des limites avec les opérations sur les fonctions (addition, multiplication, division, composition). Nous ne démontrerons aucun des résultats, même si tout pourrait se faire en revenant à la définition quantifiée des limites.

PROPRIÉTÉS 4

OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

P1 Pour la somme (les 9 cases donnent les limites de $f + g$) :

limite de g \ limite de f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

P2 Pour le produit (les 16 cases donnent les limites de $f \times g$) :

limite de g \ limite de f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Vocabulaire

"FI" signifie "Forme Indéterminée" : ce sont des cas pour lesquels il est impossible de conclure de façon générale. Une étude au cas par cas sera nécessaire.

Remarque

Les cases dans lesquelles figurent des $\pm\infty$ sont des cas où la limite peut être $+\infty$ ou $-\infty$: pour savoir, il suffit d'utiliser les règles de signe bien connues.

P3 Pour le quotient (les 16 cases donnent les limites de $\frac{f}{g}$) :

limite de $g \backslash$ limite de f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0^+	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$\pm\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

P4 Soient a, b et c des nombres réels ou $\pm\infty$. Soient g et h deux fonctions telles que $g \circ h$ est bien définie au voisinage de a . On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} h = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g = c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g \circ h = c$$

Remarque

Les deux premiers tableaux sont symétriques (car $f + g = g + f$ et $f \times g = g \times f$), mais pas le dernier (en effet, $\frac{f}{g} \neq \frac{g}{f}$).

Remarque

Ce résultat est assez intuitif en fait : il faut étudier la limite de la deuxième fonction à l'endroit où arrive la première...

Rédaction

On sait qu'il ne faut jamais écrire $\frac{1}{0}$ ou $\frac{1}{\infty}$ sur une copie !

Attention !

Il y a en fait trois autres FI : 1^∞ , 0^0 et ∞^0 . Mais si vous les rencontrez, c'est que vous n'avez pas eu le bon RÉFLEXE dans l'étude d'une fonction dont la variable est en exposant...

Garder en tête que, globalement, la limite se comporte plutôt pas mal avec les opérations élémentaires... et se souvenir de "l'égalité" : $\frac{1}{\infty} = 0$ qui est équivalente à $\frac{1}{0} = \infty$; tout en pensant aux règles de signes !

Les **formes indéterminées** sont les cas : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. C'est à dire que lorsque nous sommes confrontés à ces cas là, le résultat ne peut être prédit; la limite peut être 0, $\pm\infty$, ou encore 1, 43... Tout est possible !

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer la limite d'une fonction :

- déterminer la limite de chacune des expressions apparaissant dans l'expression de $f(x)$
- s'il n'y a pas de forme indéterminée, conclure en utilisant les règles opératoires (distinguer éventuellement limite à droite et à gauche en fonction des signes); sinon, se référer à la méthode suivante.

EXEMPLES 5

E1 Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto e^x + \ln(x) + x + 2$.

E2 Étudions la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 5}{x^2}$.

E3 Étudions la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x) + 3}{x - 1}$.

E4 Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x + 2}{x^2 - \frac{1}{x}}$.

E5 Étudions la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} + 1$.

♣ **MÉTHODE 2** ♣ Pour lever une forme indéterminée :

- commencer par s'assurer que l'on a bien affaire à une forme indéterminée
- trois possibilités ensuite :
 1. factoriser par les termes qui dominent
 2. utiliser la quantité conjuguée (parfois, quand il y a des racines carrées)
 3. si f est de la forme $\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$ et que la FI en x_0 est " $\frac{0}{0}$ ", alors se ramener à une limite en 0 en posant $X = x - x_0$ ou factoriser chaque polynôme par $x - x_0$.
- **simplifier l'expression**, puis conclure en utilisant les règles opératoires sur les limites.

EXEMPLES 6

E1 Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^2 + x}$.

E2 Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$.

♥ **Astuce du chef** ♥

En fait, on utilise l'expression conjuguée quand les termes dominants à l'intérieur des racines sont identiques. Sinon, on factorise...

E3 Étudions la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^3-1}$.

En revanche, il existe encore des cas pour lesquels cette méthode ne peut pas s'appliquer... Voyons des théorèmes généraux qui pourront parfois nous aider.

IV THÉORÈMES SUR LES LIMITES

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non nécessairement borné); x_0 un réel de I ou une extrémité (x_0 peut donc être $\pm\infty$) et f, g, h trois fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

Remarque

Quand $x_0 \in I$, on exclut le cas où f est définie en x_0 , car alors on a vu que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

IV.1 LIMITES & INÉGALITÉS

PROPRIÉTÉS 5

P1 Soit $M \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) < M \\ f \text{ a une limite finie en } x_0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq M$$

P2 On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) < g(x) \\ f \text{ et } g \text{ ont une limite finie en } x_0 \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

⚠ Attention !

Les inégalités *strictes* deviennent *larges* en passant à la limite.

Remarque

Mêmes résultats avec $>$ et $\geq$.

On parle de variations, on se place donc sur un intervalle (même si on peut définir croissance et décroissance sur des ensembles qui ne sont pas des intervalles...).

Remarques

- On adapte ces deux résultats dans le cas d'intervalles de la forme $]x_0; \dots[$. Ces deux résultats sont très souvent utilisés (déjà au lycée) et il est inutile de les mentionner.
- Ces résultats sont évidemment valables si f possède $+\infty$ ou $-\infty$ (selon les cas) comme limite en x_0 .

Remarque

Les démonstrations des autres cas sont analogues.

P3

f est croissante sur $]...; x_0[$
 f a une limite finie en x_0 } $\implies \forall x \in]...; x_0[, f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

f est décroissante sur $]...; x_0[$
 f a une limite finie en x_0 } $\implies \forall x \in]...; x_0[, f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

* DÉMONSTRATION :

P1. Traitons le cas où $x_0 = +\infty$.

Supposons $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) < M \\ f \text{ a une limite finie en } +\infty \end{cases}$. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc

$\ell > M$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in I, (x \geq A \implies \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon)$$

Ainsi, avec $\varepsilon = \frac{\ell - M}{2}$, licite car $\ell > M$, donc $\varepsilon > 0$, il existe A , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in [A; +\infty[, \ell - \frac{\ell - M}{2} \leq f(x) \leq \ell + \frac{\ell - M}{2}$$

D'où, en particulier :

$$\forall x \in [A; +\infty[, \frac{\ell + M}{2} \leq f(x)$$

Or $\ell > M$, donc $\frac{\ell + M}{2} > M$ et ainsi :

$$\forall x \in [A; +\infty[, M < f(x) : \text{absurde !}$$

Conclusion : $\ell \leq M$.

P2. Supposons $\begin{cases} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) < g(x) \\ f \text{ et } g \text{ ont une limite finie en } x_0 \end{cases}$.

Posons, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}, h(x) = f(x) - g(x)$.

Dans ce cas, on a : $\begin{cases} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, h(x) < 0 \\ h \text{ a une limite en } x_0 \text{ (par opérations, car } f \text{ et } g \text{ ont une limite finie en } x_0) \end{cases}$. Ainsi, d'après

P1 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq 0$$

Or, puisque f et g ont une limite finie en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

P3. • Supposons $\begin{cases} f \text{ est croissante sur }]...; x_0[\\ f \text{ a une limite finie en } x_0 \end{cases}$. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $z \in]...; x_0[$, que l'on considère ensuite, tel que $f(z) > \ell$. La fonction f étant croissante sur $]...; x_0[$, on a :

$$\forall x \geq z, f(x) \geq f(z)$$

D'où, en passant à la limite lorsque $x \rightarrow x_0$, on obtient (d'après P1) :

$$\ell \geq f(z) : \text{absurde !}$$

Conclusion : $\forall x \in]...; x_0[, f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

• Analogie.

*

EXEMPLES 7

E1 Donnons une fonction f telle que : " $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$ " ET $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ".

E2 Donnons deux fonctions f et g telles que " $\forall x \in]0; 1[, f(x) < g(x)$ " ET $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ ".

IV.2 THÉORÈMES DE COMPARAISON

THÉORÈME 1

THÉORÈME D'ENCADREMENT

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ f \text{ et } h \text{ ont la même limite } \ell \text{ en } x_0 \end{array} \right\} \implies g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

Remarque

Théorème très utile (un peu moins sur les fonctions que sur les suites), parfois appelé théorème des gendarmes.

★ DÉMONSTRATION : Traitons le cas où x_0 est un réel.

Supposons $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ f \text{ et } h \text{ ont la même limite } \ell \text{ en } x_0 \end{array} \right.$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f et h admettent ℓ comme limite en x_0 , il existe deux réels strictement positifs δ_1 et δ_2 , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, (x \in [x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1] \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, (x \in [x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2] \implies |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Ainsi, en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\} \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$:

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon ; \quad \ell - \varepsilon \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$$

Or, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. D'où :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \implies \ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon)$$

Conclusion : g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

★

EXEMPLE 8

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \geq 4, \ln(2) \leq f(x) \leq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

Déterminons la limite en $+\infty$ de f .

Et un second théorème, dont la démonstration est analogue à celle du théorème d'encadrement :

THÉORÈME 2

THÉORÈME DE COMPARAISON

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \implies g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \implies f \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

★ DÉMONSTRATION :

- Traitons le cas où x_0 est un réel.

$$\text{Supposons } \begin{cases} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \end{cases}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, il existe $\delta > 0$, que l'on considère ensuite, tel que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]) \implies f(x) \geq A$$

Or, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $g(x) \geq f(x)$. D'où :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, (x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]) \implies g(x) \geq A$$

Conclusion : g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

- Analogue... Ou en considérant les fonctions $-f$ et $-g$ et en utilisant le premier point.

★

EXEMPLE 9

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq x^2$ et déduisons-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

...

IV.3 CROISSANCES COMPARÉES

En application du théorème de comparaison, on peut énoncer les très fameuses croissances comparées qui sont des cas de forme indéterminée à connaître parfaitement.

Pour tous réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

P1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty$

P2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{\ln(x)^\gamma} = +\infty$ et en conséquence : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\beta \ln(x)^\gamma = 0$

P3 En conséquence des deux premiers points : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{\ln(x)^\gamma} = +\infty$

★ DÉMONSTRATION :

P1. Le cas particulier où $\alpha = \beta = 1$ a été démontré dans l'exemple précédent. Soient $\alpha, \beta > 0$.
Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{x} \right)^\beta \\ &= \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{\frac{\alpha x}{\beta}} \right)^\beta \times \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\beta \end{aligned}$$

Or :

✓ puisque $\alpha, \beta > 0$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{\beta} = +\infty$

✓ et, par croissances comparées de l'exemple précédent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Ainsi, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{\frac{\alpha x}{\beta}} \right)^\beta = +\infty$. **Conclusion :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty$.

P2. ...

P3. Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\exp(x)^\alpha}{\ln(x)^\gamma} = \frac{\exp(x)^\alpha}{x^\beta} \times \frac{x^\beta}{\ln(x)^\gamma}$ et d'utiliser P1 et P2...

★

EXEMPLES 10

Cas particuliers des croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

★ Classique ! ★

On les rencontre dans tous les sens possibles... Il faut donc se familiariser avec toutes ces formes.

IV.4 THÉORÈME DE LIMITE MONOTONE

Et un dernier théorème (dont la démonstration des deux premiers cas est hors programme) :

THÉORÈME 3

THÉORÈME DE LIMITE MONOTONE

Si f est monotone sur $]a; b[$, alors f possède une limite en a et en b ; et plus précisément :

	f croissante	f décroissante
f majorée	limite finie en b	limite finie en a
f minorée	limite finie en a	limite finie en b
f non majorée	$\lim_b f = +\infty$	$\lim_a f = +\infty$
f non minorée	$\lim_a f = -\infty$	$\lim_b f = -\infty$

Remarque

Dans la moitié des cas, ce théorème ne permet pas de connaître la valeur de la limite, mais affirme seulement qu'elle existe... Il sera utile sur des exercices plus théoriques.

★ DÉMONSTRATION : Les démonstrations des deux premières lignes sont hors programme... Les démonstration des deux dernières sont analogues à celles faites dans le chapitre 7 ; et il n'y a pas assez de place en bas de page pour les contenir.

★