

EXERCICES DU CHAPITRE 11

LIMITES DE FONCTIONS

EXERCICE 1 - ●○○ - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x}{x-3}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x}{x-3}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x-3}{1-x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x-3}{1-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+1}{e^{-x} - 1}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x+1}{e^{-x} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{x^3}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x + 2))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{-1}{x^2}}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{-1}{x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - \ln(x + 2))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x} + 1}$

EXERCICE 2 - ●●○ - Calculs de limites (bis)

Déterminer les limites ci-dessous :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x + \ln(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 5x + 1} - \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x + 2))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(e^x + 2))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 e^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

EXERCICE 3 - ●●○ - Vrai ou faux ?

1. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a , noté I)
4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a , noté I)
5. Si la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la fonction f possède une limite en $+\infty$.
6. Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$.
7. Si f est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
8. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors f est majorée par ℓ .
9. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 4 - ●●○ - Une limite classique

1. Démontrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
3. En déduire les limites suivantes :
 - 3.a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
 - 3.b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$
 - 3.c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$
 - 3.d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
 - 3.e. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\ln(x)}$

EXERCICE 5 - ●●○ - Étude de fonctions

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
 - 1.a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f .
 - 1.b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - 1.c. Représenter l'allure de la courbe de f .
2. Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
 - 2.a. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
 - 2.b. Démontrer que la fonction f est paire.
 - 2.c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
 - 2.d. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - 2.e. Représenter l'allure de la courbe de f .
3. Considérons la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - 3.a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f .
 - 3.b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - 3.c. Représenter l'allure de la courbe de f .