11

Probabilités

Lois à densité usuelles

Introduction...

Pour bien démarrer...

1. **Définition.** Une variable aléatoire X est à densité lorsque : sa fonction de répartition, notée F_X vérifie :
   - ✓ F_X est continue sur $\mathbb{R}$,
   - ✓ F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.
2. **Définition.** Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est une densité de probabilité lorsque :
   - ✓ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$,
   - ✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels,
   - ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1.
3. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Liens entre f_X et F_X ?
   - En tout réel x en lequel F_X est dérivable :
   $$f_X(x) = F_X'(x)$$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
4. Si X est à densité, de fonction de répartition F_X, alors $\mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$.
5. Espérance d'une variable aléatoire X à densité de densité f_X : On dit que la variable aléatoire X admet **une espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ est absolument convergente et, le cas échéant :
   $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{X(\Omega)} x f_X(x)dx$$
6. Théorème de transfert : Soient X une variable aléatoire à densité, de densité f_X nulle en dehors de $X(\Omega)$ ainsi que g une fonction continue sur $X(\Omega)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
   La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente et, le cas échéant :
   $$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$$

Ce chapitre est un inventaire des lois à densité usuelles. Nous commençons par résumer les informations sur les lois dans ce tableau, puis nous continuerons sur des résultats de stabilité. Les calculs de fonctions de répartition, d'espérances et variances de ces lois sont des bons entraînements !

Nom & notation	$X(\Omega)$	Densité	Fonction de répartition	Espérance & variance
Uniforme sur $[a;b]$ $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ $X\hookrightarrow\mathscr{U}\left([a;b]\right)$ *On adapte dans les cas $]a;b]$, $[a;b[$ et $]a;b[$, mais espérance et variance restent identiques.*	$[a;b]$	$f:x\longmapsto\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a;b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$F_X:x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a;b]\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$	$\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $\mathbb{V}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle de paramètre λ $\lambda>0$ $X\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$f:x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$	$F_X:x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$	$\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite $X\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$	$\mathbb{R}$	$f:x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	Pas d'expression *(souvent notée Φ)* mais : $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(-x)=1-\Phi(x)$ (QCl36)	$\mathbb{E}(X)=0$ $\mathbb{V}(X)=1$
Normale de paramètres μ et σ^2 $\mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0$ $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$f:x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ On en déduit : $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)\iff\dfrac{X-\mu}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$	Puisque $X\hookrightarrow\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)\iff\dfrac{X-\mu}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0;1)$ on a : $F_X(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\mathbb{E}(X)=\mu$ $\mathbb{V}(X)=\sigma^2$

Propriété 1

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a :

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1]\right) \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([a;b]\right)$$

À retenir...
Parfois utile, on a aussi
$X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([a;b]\right) \Longrightarrow -X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([-b;-a]\right)$
que l'on démontre de la même façon.

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1]\right)$. Notons $Y = a + (b-a)X$ ainsi que F_X et F_Y les fonctions de répartitions respectives de X et Y. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

Rédaction
Je profite de cette démonstration pour rédiger autrement, sans travail préalable sur $Y(\Omega)$. Certains cas, comme celui-ci, se prêtent bien à ce type de rédaction (plus allégée).

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\left([Y \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left([a + (b-a)X \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-a}{b-a}\right]\right) && b-a>0 \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \dfrac{x-a}{b-a} < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } \dfrac{x-b}{b-a} \in [0;1] \\ 1 & \text{si } \dfrac{x-a}{b-a} > 1 \end{cases} && X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1]\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} && b-a>0
\end{aligned}$$

Par conséquent, F_Y est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi...
Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{U}\left([a;b]\right)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Similaire au sens direct.

Propriété 2 — Méthode d'inversion pour la loi exponentielle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1[\right)$, alors $\dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Démonstration : Voir QCl33.

Propriété 3 — Caractérisation des lois exponentielles

Les lois exponentielles sont les seules lois à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui sont sans mémoire.

Démonstration : Voir la fiche sur les lois sans mémoire.

Propriétés 4 — Stabilité des lois normales

P1 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ ainsi que X une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé.

P1.a $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1) \implies -X \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$

P1.b $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu;\sigma^2) \iff \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$

P1.c $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu;\sigma^2) \implies \forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ (aX+b) \hookrightarrow \mathscr{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$

P2 **P2.a** Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_*^+$ ainsi que X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1^2) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2^2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1+X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2;\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

P2.b Soient $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels, $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs ainsi que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.
On a, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall k\in\mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_k;\sigma_k^2) \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n;\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2)$$

⋆ Démonstration :

P1. P1.a Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Notons $Y=-X$ ainsi que F_Y la fonction de répartition de Y.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y\leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-X\leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X\geqslant -x]) \\ &= 1-\mathbb{P}([X<-x]) \\ &= 1-\Phi(-x) && X \text{ est à densité et } X\hookrightarrow\mathcal{N}(0;1) \\ &= \Phi(x) && \text{propriété sur } \Phi \end{aligned}$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...
Conclusion : $-X$ et X suivent la même loi.

> **Petite remarque**
> Nous avons utilisé la propriété sur Φ qui ne dépend que de la parité de la densité de X... en aucun cas de son expression.
> Par conséquent, de façon générale, si X est à densité de densité paire, alors $-X$ et X ont même loi.

P1.b Procédons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $X\hookrightarrow\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Notons $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ainsi que F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives de X et Y.
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y\leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([X\leqslant \sigma x+\mu]) && \sigma>0 \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt && X\hookrightarrow\mathcal{N}(\mu;\sigma^2) \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$ dans cette intégrale :

$$\left|\begin{array}{lcl} t &=& \sigma u+\mu \\ u &=& \dfrac{t-\mu}{\sigma} \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{lcl} dt &=& \sigma du \\ du &=& \dfrac{1}{\sigma}dt \end{array}\right. \quad ;$$

$t=$	$-\infty$	$\sigma x+\mu$
$u=$	$-\infty$ (car $\sigma>0$)	x

Ce changement de variable est bien licite car affine (et non constant). On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt &= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du && \sigma>0\text{, donc }\sqrt{\sigma^2}=\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \end{aligned}$$

On a ainsi démontré :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x)=\Phi(x)$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...
Conclusion : $Y\hookrightarrow\mathcal{N}(0;1)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On procède de la même façon...

P1.c Supposons que $X\hookrightarrow\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times R$. Posons $Y=aX+b$.
On a $a\sigma\neq 0$ et :

> **✘ Attention !**
> a peut être négatif, donc l'écart-type de Y sera $|a|\sigma$...

$$\frac{Y-(a\mu+b)}{|a|\sigma}=\frac{aX+b-a\mu-b}{|a|\sigma}$$

$$= \frac{a(X-\mu)}{|a|\sigma}$$

Distinguons deux cas :

- si $a > 0$:
  On obtient :
  $$\frac{Y-(a\mu+b)}{|a|\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
  Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, donc d'après la propriété précédente (sens direct), $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.
  Par conséquent :
  $$\frac{Y-(a\mu+b)}{|a|\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$
  Et ainsi, d'après la propriété précédente (sens réciproque) :
  $$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b; a^2\sigma^2)$$
- si $a < 0$:
  On obtient :
  $$\frac{Y-(a\mu+b)}{|a|\sigma} = -\frac{X-\mu}{\sigma}$$
  Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, donc d'après la propriété précédente (sens direct), $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et ainsi, d'après P1.a : $-\dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.
  Par conséquent :
  $$\frac{Y-(a\mu+b)}{|a|\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$
  Et ainsi, d'après la propriété précédente (sens réciproque) :
  $$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b; a^2\sigma^2)$$

Dans le deux cas, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b; a^2\sigma^2)$.

P2. **P2.a** Voir la fiche sur la somme de variables aléatoires indépendantes à densité.

P2.b Par récurrence, en initialisant avec **P2.a**. L'hérédité utilisant le lemme des coalitions ainsi que **P2.a**.

$\star$

Et pour terminer, voici comment lire une table de $\mathcal{N}(0;1)$. Le tableau ci-dessous contient des valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Lecture...

- En sélectionnant la ligne "1.6" et la colonne "0,04", on obtient $\Phi(1,64) \simeq 0,9495$.
- Pour avoir $\Phi(-1)$, on utilise : $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$... et, à l'aide du tableau : $\Phi(1) \simeq 0,8413$.