Exercices du chapitre 11
Tout sur les variables aléatoires à densité

Technique

Exercice 1 - ●●○○ - Démonstrations de cours (à faire en autonomie)
Démontrer les résultats obtenus sur les fonctions de répartition, les espérances et variances des lois uniformes et exponentielles.

Exercice 2 - ●○○○ - Amusement sur la loi normale
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 1. On note $\alpha = \mathbb{P}\big([X \leqslant -2]\big)$. Exprimer en fonction de α les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}\big([X \geqslant -2]\big)$
2. $\mathbb{P}\big([-2 \leqslant X \leqslant 1]\big)$
3. $\mathbb{P}\big([X \geqslant 4]\big)$
4. $\mathbb{P}\big([-2 \leqslant X \leqslant 4]\big)$

Exercice 3 - ●○○○ - Du minimum...
Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ ainsi que $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur $[0;1]$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

Exercice 4 - ●●●○ - Somme de VA à densité
On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X ou f_Y est bornée, alors la variable aléatoire $X+Y$ est à densité et admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$$

1. Supposons que X et Y sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Supposons que X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$. Déterminer la loi de $X+Y$.

Entraînement

Exercice 5 - ●●○○ - Loi de Laplace
Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Démontrer que la variable aléatoire $|X|$ est à densité et reconnaître sa loi.
4. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

Exercice 6 - ●●○○ - Loi logistique
On considère la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire admettant F comme fonction de répartition. Donner une densité de X, notée f.
2. Étudier la parité de la fonction f. En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.
4. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

Concours

Exercice 7 - ●●○○ - EDHEC 2001 E (Loi de Rayleigh de paramètre 1)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *Dans la suite, on considère une variable aléatoire X de densité f.*
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Déterminer la médiane de X, c'est-à-dire le réel μ pour lequel $\mathbb{P}\big([X \leqslant \mu]\big) = \dfrac{1}{2}$.
4. On appelle **mode de la variable aléatoire X** tout réel x en lequel f atteint son maximum.
   Montrer que X n'admet qu'un seul mode, notée M_0, et le déterminer.
5. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   En déduire que X possède une espérance et montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
6. Justifier que X admet une variance et la calculer.
7. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.
   - 7.a. Démontrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   - 7.b. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **`def simule_X():`** qui permet de simuler une réalisation de X.
   - 7.c. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction **`mystere`** ci-dessous.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def mystere():
    L=[simule_X() for k in range(10000)]
    return np.mean(L)
```

Exercice 8 - ●●○○ - EDHEC 2005 E

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

1. 1.a. Pour tout $x \in [0;1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   - 1.b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.
   - 1.c. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, de densité f et de fonction de répartition F.
2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.
3. On pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note G sa fonction de répartition.
   - 3.a. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ en fonction de x.
   - 3.b. En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.
4. 4.a. Pour tout $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$.
   - 4.b. Démontrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.
   - 4.c. Exprimer X en fonction de Y puis en déduire que X possède une espérance que l'on exprimera en fonction de a.
   - 4.d. Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-2Y}\big) = \dfrac{a}{a+2}$.
     En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel strictement positif a et permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

Exercice 9 - ●●○○ - Ecricome 2000 E

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note f une densité de X et F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in]-\infty;0[,\ f(t) = 0$

(ii) pour tout $t \in [0;+\infty[,\ f(t) > 0$

(iii) f est continue sur $]0;+\infty[$

1. Démontrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$.
   Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé **médiane de X**.

2. Dans cette question, on suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X.
3. Dans cette question, on suppose que la densité de X est donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
 3.a. Vérifier que la fonction f est bien une densité de probabilité et qu'elle satisfait aux hypothèses de début de l'exercice.
 3.b. Déterminer la fonction de répartition F de X.
 3.c. Démontrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie : $1 \leqslant m \leqslant 2$ (on donne $6 < e^2 < 9$).
 On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m. On introduit pour cela la fonction $g : x \longmapsto \ln(2x+2)$, définie sur $[1;2]$.
 3.d. Établir : $g(m) = m$.
 3.e. Démontrer que pour tout $x \in [1;2]$, $g(x) \in [1;2]$ et $|g(x) - m| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - m|$.
 3.f. On considère à présent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
 Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - m| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
 En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de sa limite.
 3.g. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `approx_m(eps):` qui prend en entrée un réel strictement positif eps et renvoie une valeur approchée de m à eps-près.
4. On revient au cas général et on suppose que X admet une espérance et une variance, notés respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. On note toujours m la médiane de X.
 4.a. Démontrer les inégalités :
$$\mathbb{V}(X) \geqslant \int_0^m \left(t - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(t)dt \quad ; \quad \mathbb{V}(X) \geqslant \int_m^{+\infty} \left(t - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(t)dt$$
 4.b. En distinguant les cas $m \leqslant \mathbb{E}(X)$ et $m > \mathbb{E}(X)$, établir :
$$|m - \mathbb{E}(X)| \leqslant \sqrt{2\mathbb{V}(X)}$$

Exercice 10 – ●●○○ - Ecricome 2003 E

Sous diverses hypothèses, l'exercice différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1

On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.
2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
 On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.
 2.a. Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.
 2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in X(\Omega)$, donner $\mathbb{P}_{[Y=n]}\big([X = k]\big)$. *On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.*
 2.c. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Partie 2.

On considère la fonction $f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

3. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera Z.
4. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
5. Démontrer que Z admet une espérance et la déterminer.
6. La variable aléatoire Z admet-elle une variance ?
7. Dans cette question, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z.
 7.a. Déterminer les probabilités :
$$\mathbb{P}\big([Z_1 \geqslant 2]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}\big([Z_1 \leqslant 3]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}_{[Z_1 \geqslant 2]}\big([Z_1 \leqslant 3]\big)$$
 7.b. On note $T = \max(Z_1; Z_2)$. Exprimer la fonction de répartition de T en fonction de F_Z. En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne A est est une variable aléatoire M suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne B est est une variable aléatoire N suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

8. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et w de N.
9. On note S la variable aléatoire égale au temps total de fabrication d'une pièce. Déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

Exercice 11 - ●●○○ - EML 2019 E

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A. Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V. On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. 1.a. Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

   1.b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt$ converge.

   On admet le résultat suivant :
$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt = \mathbb{P}\big([U \leqslant V]\big)$$
2. En déduire : $\mathbb{P}\big([U > V]\big) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)f_V(t)dt$.
3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   3.a. Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   3.b. En déduire : $\mathbb{P}\big([U > V]\big) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B. Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par :$M_n = \min(T_1, ..., T_n)$.

   4.a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}\big([M_n > t]\big)$.

   4.b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).
5. 5.a. Montrer : $\mathbb{P}\big([N = 1]\big) = \mathbb{P}\big([T_1 \leqslant T_0]\big) = \dfrac{1}{2}$.

   5.b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}\big([N > n] \cup [N = 0]\big)$ en fonction de n.

   5.c. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   5.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\big([N = 0]\big)$.
6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Exercice 12 - ●●○○ - EDHEC 2016 E

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}\big([Z = 1]\big) = p \ \text{ et } \ \mathbb{P}\big([Z = -1]\big) = 1 - p$$
- Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$
- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.
2. 2.a. Établir, grâce au système complet d'évènements $\big([Z = 1], [Z = -1]\big)$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$
   2.b. Expliciter $F_X(x)$ dans les cas :
$$x < -3, \quad -3 \leqslant x < -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 < x \leqslant 3 \quad \text{ et } \quad x > 3$$
   2.c. Démontrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_X.

   2.d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.
3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

   3.a. Vérifier que l'on a :
$$X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$$
   3.b. Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

   3.c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.
4. 4.a. Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
   Déterminer la loi de $2T - 1$.

   4.b. Écrire des commandes **Python** permettant de simuler U, V,Z, puis X.