Exercices du chapitre 11
Diagonalisation des matrices carrées

Technique

Exercice 1 - ●●○ - Diagonalisable ou pas ?

Dans chaque cas, étudier la diagonalisabilité de la matrice A et, le cas échéant, la diagonaliser.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - ●●○ - Cas général...

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Diagonaliser la matrice $M(a)$.

Entraînement

Exercice 3 - ●●○ - Théorème spectral dans le cas $n = 2$

Démontrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exercice 4 - ●●○

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad ; \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

1. Justifier que f est entièrement défini.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée A.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$ puis une de $\ker(f)$.
4. En déduire une valeur propre de A ainsi que le sous-espace propre associé.
5. Démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 5 - ●●○ - Avec des fonctions polynomiales

On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(P)(x) = P(x+2) - P(x)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. 2.a. Soit $P \in \ker(f)$. Montrer que la fonction polynomiale $x \longmapsto P(x) - P(0)$ est nulle.
   2.b. En déduire que $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, notée A.
4. Calculer A^3 puis en déduire le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 - ●●○ - Vrai ou faux ?

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A admet au plus n vecteurs propres.
2. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.
3. Si deux matrices ont les mêmes valeurs propres, alors elles sont semblables.
4. Il existe des matrices n'ayant aucune valeur propre réelle.
5. Si A est diagonalisable, alors pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable.
6. Si, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
7. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Concours

Exercice 7 – ●●○ – Type écrit

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer $(A-2I_3)^2$ puis en déduire que $(A-2I_3)^3 = 0$.
2. Démontrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Déterminer le rang de $A-2I_3$.
5. En déduire que 2 est valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre associé, noté E_2.
6. Posons $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$.
   - 6.a. Vérifier que $f(v) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.
   - 6.b. Résoudre l'équation $f(x) = 2x + v$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.
   - 6.c. Posons $w = (-1, 0, 0)$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - 6.d. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w), notée T, et expliciter une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n en fonction de n. On considérera la matrice N définie par $T = 2I_3 + N$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
9. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; AM = MA\right\}$.
   - 9.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   - 9.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$
   - 9.c. Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   - 9.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
10. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; M^2 + I_3 = A\}$.
    - 10.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
    - 10.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
    $$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$
    - 10.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
    - 10.d. En déduire, à l'aide de la question ??, les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
    - 10.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Exercice 8 – ●●○ – EML 2016 E

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ainsi que $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \;/\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Partie I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. 3.a. Justifier que A est diagonalisable.
   - 3.b. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Partie II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe la matrice AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. 9.a. Calculer F^3.
   - 9.b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de F.

10. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.

11. 11.a. Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

    11.b. Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Exercice 9 – ●●○ - EDHEC 2013 E

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

    1.a. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.

    1.b. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\text{Im}(f)$.

    1.c. Montrer que $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$.

2. On considère maintenant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. On note M la matrice canoniquement associée à g. L'objectif de la question est d'établir que $\text{Im}(g^2) = \ker(g)$.

    2.a. 2.a.i. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.

    2.a.ii. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.

    2.a.iii. En déduire que la matrice M n'est pas diagonalisable.

    2.b. 2.b.i. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

    2.b.ii. Montrer que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

    2.b.iii. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, notée N.

    2.b.iv. Déterminer alors une base de $\ker(g)$ ainsi qu'une base de $\text{Im}(g^2)$. Conclure.

Exercice 10 – ●●○ - **Une matrice utile en analyse numérique...**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On assimilera les matrices de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ aux réels.

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. L'objectif de cette question est d'établir que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

    2.a. Soit $X \in \mathcal{M}_{6,1}(\mathbb{R})$. Quelle est la nature de ${}^tXAX$?

    2.b. Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé. Exprimer ${}^tXAX$ en fonction de $\lambda, a, b, c, d, e, f$.

    2.c. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAX$.

    2.d. Déduire des deux questions précédentes que les valeurs propres de A sont strictement positives.