12

Analyse

Fonctions de deux variables

Introduction...

Les fonctions de deux variables réelles (et plus généralement les fonctions à plusieurs variables) représentent un outil très utilisé dans les domaines tels que l'économie, la santé, la physique... afin de modéliser des phénomènes concrets.
Dans ce chapitre, nous nous limiterons à une rapide étude des fonctions de deux variables : représentations graphiques, continuité, recherche d'extrema. De façon générale, tout le calcul différentiel et le calcul intégral vus sur les fonctions d'une variable peuvent s'étendre aux fonctions de deux variables : notion de différentielle, intégrales multiples, équations aux dérivées partielles... L'ampleur de la tâche serait considérable si nous devions explorer tous ces aspects. Ces domaines sont relativement récents, essentiellement XIXème et XXème siècle, et comme assez souvent, leur développement mathématique est lié à des nécessités dans d'autres disciplines telles que celles mentionnées ci-dessus.

Pour bien démarrer...

1. Dans le plan, qu'est-ce le cercle de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque fermé de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque ouvert de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$?
   Soient $A(x_A, y_A)$ un point du plan et r un réel strictement positif.
   - Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2\right\}$.
   - Le disque fermé de centre A et de rayon r est l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leqslant r^2\right\}$.
   - Le disque ouvert de centre A et de rayon r est l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 < r^2\right\}$.

2. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D. Définition du graphe de f :
   Le graphe de f est l'ensemble $\left\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \ / \ y = f(x)\right\}$.

3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I. Définition quantifiée de "f est continue en a" :
   f est continue en a lorsque :
   $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \ \left(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$$
   Ou, de façon équivalente :
   $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \ \left(|x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\right)$$

   Important !
   L'information $|x - a| < \delta$ équivaut à $x \in]a - \delta; a + \delta[$.

4. Formules de Taylor-Young :
   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur I.
   - Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ et
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x - a)\right)$$
   - Si f est $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f admet un $\mathrm{DL}_2(a)$ et
   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x - a)^2\right)$$

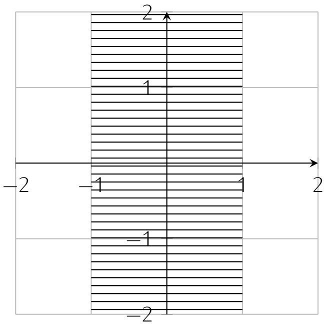
Dans tout ce chapitre, on confondra point du plan et couple de $\mathbb{R}^2$. Si A est le point du plan de coordonnées (x_A, y_A), on écrira $A = (x_A, y_A)$.

I Un peu de topologie dans $\mathbb{R}^2$...

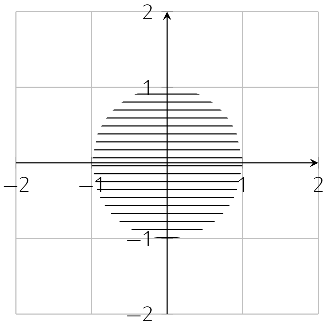
Commençons par représenter quelques ensembles...

Exemple 1

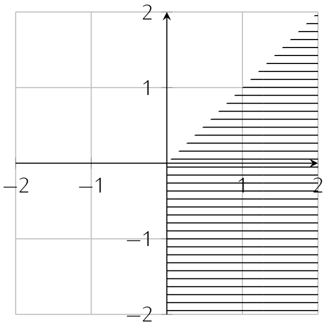
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$



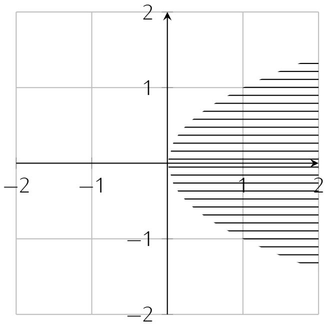
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x \geqslant 0 \text{ et } y \leqslant x)\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant y^2\}$



Définition 1 — **Distance (HP)**

Soit E un ensemble. Une **distance** sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- ✓ $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ *(symétrie)*
- ✓ $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ \big(d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2\big)$ *(séparation)*
- ✓ $\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, \ d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$ *(inégalité triangulaire)*

Propriétés 1 — **Distances euclidiennes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$**

P1 L'application $d : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 - x_2| \end{array}$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

P2 L'application $d : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \longmapsto & \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{array}$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Petite remarque

Puisque $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$, la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ étend bien la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$... et on imagine assez bien la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

✎ Notation

Puisqu'il s'agit d'une distance entre deux points du plan, on notera souvent $d(A, B)$ la distance entre $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$.

⋆ Démonstration :

P1. Aucune difficulté particulière.

P2. La démonstration de l'inégalité triangulaire pour cette distance est plus technique et ne présente pas de réel intérêt ici.

⋆

Définition 2 — **Boules ouvertes**

Soient A un point du plan et $r \in \mathbb{R}_*^+$.
La **boule ouverte de centre A et de rayon r**, notée $B(A, r)$, est l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(A, M) < r\}$.

Autrement dit :

Dans le plan, $B(A, r)$ est le disque de centre A et de rayon r sans son contour, c'est-à-dire sans le cercle de centre A et de rayon r.

Définitions 3 — Ensembles ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$

On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

D1 D est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ lorsque :

$$\forall M \in D,\ \exists r > 0 \ /\ B(M, r) \subset D$$

D2 D est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2 \setminus D$ (le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$) est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

D3 D est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $D \subset B(0, r)$.

En gros... Un ensemble D est un ouvert s'il ne contient aucun point de sa frontière...

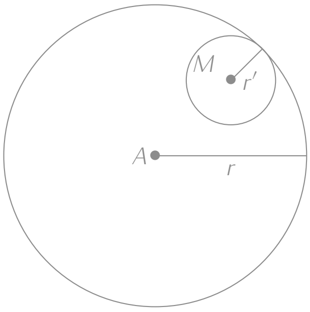
Autrement dit : Un ensemble est borné si on peut l'inclure dans une boule.

Exemples 2

On ne démontre pas les résultats qui suivent, sauf le premier...

E1 Une boule ouverte est un ouvert.

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrons que $B(A, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $M \in B(A, r)$. Montrons l'existence d'un réel strictement positif r' tel que $B(M, r') \subset B(A, r)$.



Posons $r' = r - d(A, M)$.

- ✓ Pour commencer, puisque $M \in \mathscr{B}(A, r)$, on a $d(A, M) < r$; d'où :

$$r' > 0$$

- ✓ Montrons ensuite que pour tout $N \in B(M, r')$, on a $N \in B(A, r)$.
Soit $N \in B(M, r')$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$d(A, N) \leqslant d(A, M) + d(M, N)$$

Or $N \in B(M, r')$, donc $d(M, N) < r'$. Par conséquent :

$$d(A, M) + d(M, N) < d(A, M) + r'$$

Mais :

$$\begin{aligned} d(A, M) + r' &= d(A, M) + r - d(A, M) \\ &= r \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$d(A, N) < r$$

Autrement dit :

$$N \in B(A, r)$$

On a ainsi établi :

$$\exists r' > 0 \ /\ B(M, r') \subset B(A, r)$$

Conclusion : la boule $B(A, r)$ est ouverte.

E2 Une boule fermée (boule ouverte + contour) est un fermé.

E3 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $[a, b] \times [c, d]$ est fermé et borné.

E4 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $]a, b[\times]c, d[$ est ouvert.

E5 $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

E6 Une boule est bornée.

E7 Une droite n'est pas bornée.

E8 L'ensemble $\mathbb{R} \times [-1; 2]$ est fermé mais non borné.

E9 $[0; 1]\times]0; 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

II Fonctions de deux variables réelles

II.1 Définition et premiers exemples

Définitions 4 — **Fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, applications partielles**

D1 On appelle **fonction de deux variables réelles à valeurs réelles** toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D2 Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les applications $f(., y_0) : x \longmapsto f(x, y_0)$ et $f(x_0, .) : y \longmapsto f(x_0, y)$ sont appelées **applications partielles de f en (x_0, y_0)**.

Important ! Les applications partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!

Exemples 3

E1 La distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.

E2 Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, la fonction $(x, y) \longmapsto x^n y^m$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, appelée **fonction monôme de deux variables**.
Une **fonction polynomiale sur** $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de fonctions monômes sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions suivantes sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto 1 + xy \quad ; \quad (x, y) \longmapsto x^2 + x$$

E3 Les fonctions $(x, y) \longmapsto x$ et $(x, y) \longmapsto y$ sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$. Elles sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**.

E4 Dans chaque cas, donnons une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ qui soit non nulle et vérifiant les conditions données :

- qui s'annule une infinité de fois :
  La fonction $f : (x, y) \longmapsto x - y$ convient.
  En effet, f est non nulle et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, x) = 0$. La fonction f s'annule donc une infinité de fois (sur la première bissectrice).
- qui s'annule sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées :
  La fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ convient.
  En effet, f n'est pas nulle et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$ ainsi que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0, y) = 0$. La fonction f s'annule donc sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

E5 Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$?
Notons D_f l'ensemble de définition de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in D_f &\iff \big(f(x, y) \text{ existe}\big) \\ &\iff x^2 + y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Or :

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$$

Par conséquent, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

☞ **Rappel...** Une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls.

II.2 Représentations graphiques

Définition 5 — **Graphe d'une fonction de deux variables**

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe de f** l'ensemble :

$$\{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \; / \; z = f(x, y)\}$$

Important ! Le graphe d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **une surface dans l'espace**.

Définition 6 — **Ligne de niveau**

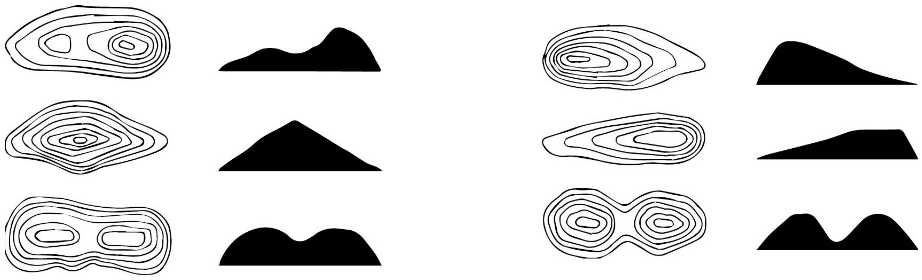
Soient f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau a de f** l'ensemble :

$$\{(x, y) \in D \; / \; f(x, y) = a\}$$

Important ! Une ligne de niveau d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un point, soit une courbe du plan.

Exemples 4

E1 Les amateurs de randonnée sont des habitués des lignes de niveau... Car on trouve sur les cartes ce que l'on appelle des **courbes de niveaux** (ou isohypse d'un point de vue météorologique) : les courbes reliant les points du plan d'égale altitude.



En gros...
On coupe la surface à l'horizontale à la hauteur a et la courbe obtenue (que l'on projette sur le plan) est la ligne de niveau a.
On peut donc voir le graphe de f comme la surface obtenue par union des lignes de niveau, chacune étant remontée à sa "hauteur" (le niveau).

E2 Sur une carte météo, chaque point du globe est associé à un unique couple (x, y) de coordonnées sur cette carte.
La fonction qui à chaque point du globe associe sa pression atmosphérique au sol est une fonction de deux variables réelles. Ses lignes de niveau sont visibles sur les cartes météo : ce sont les **isobares**.

Voir dernière page pour d'autres exemples et graphiques.

Propriété 2

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Deux lignes de niveau différentes n'ont aucun point commun.

Autrement dit :
Deux lignes de niveau sont soit confondues soit d'intersection vide.

Démonstration : Soient a, b deux réels distincts. Notons L_a et L_b les lignes de niveaux a et b de f.
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in L_a \cap L_b$.
Puisque $(x_0, y_0) \in L_a$, on a :

$$f(x_0, y_0) = a$$

Puisque $(x_0, y_0) \in L_b$, on a :

$$f(x_0, y_0) = b$$

Par conséquent :

$$a = b$$

Ce qui est absurde.
Par conséquent, $L_a \cap L_b = \varnothing$. Deux lignes de niveau différentes n'ont donc aucun point commun.

III Continuité des fonctions de deux variables

Définition 7 — **Limite finie en un point**

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$.
La fonction f admet pour limite le réel ℓ en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall M \in D,\ \Big(d(M, M_0) < \delta \Longrightarrow |f(M) - \ell| < \varepsilon\Big)$$

✎ Notations
On note alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

Théorème 1 — **Unicité de la limite.**

Si une fonction de deux variables possède une limite finie en un point, alors cette limite est unique.

Démonstration : Analogue à celle sur les fonctions d'une variable...

Autrement dit :
f est continue en (x_0, y_0) lorsque $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe et que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Définitions 8 — **Continuité d'une fonction de deux variables**

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1 Soit $(x_0, y_0) \in D$. Notons $M_0 = (x_0, y_0)$. La fonction $\boldsymbol{f}$ **est continue en** $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall M \in D,\ \Big(d(M, M_0) < \delta \Longrightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon\Big)$$

D2 On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue sur** $\boldsymbol{D}$ si f est continue en chaque point de D.

Exemples 5

E1 Les fonctions $(x, y) \longmapsto x$ et $(x, y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

E3 Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

E4 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- Les applications partielles de f en 0 sont constantes égales à 0, donc sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier continues en 0...
- En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, x) &= \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x) = \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : f ne possède pas de limite en $(0, 0)$ (car $f(x, y)$ se rapproche de 0 si $x = 0$ ou $y = 0$, mais se rapproche de $\dfrac{1}{2}$ si $x = y$) et n'est donc pas continue en $(0, 0)$.

Important !
Ne regarder que la limite des applications partielles se résume à arriver en M_0 par la gauche, la droite, le haut et le bas seulement !
Pour qu'une fonction de deux variables soit continue en M_0, il faut $f(M)$ se rapproche de $f(M_0)$ *peu importe la façon dont M se rapproche de M_0*... Et pas seulement selon quelques directions particulières...

Propriétés 3

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ ainsi que f et g deux fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

P1 Si f est continue sur D, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue sur D.

P2 Si f et g sont continues sur D, alors $f + g$ est continue sur D.

P3 Si f et g sont continues sur D, alors fg est continue sur D.

P4 Si f et g sont continues sur D et que g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

P5 Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } D \\ f(D) \subset I \\ \varphi \text{ continue sur } I \end{array}\right\} \Longrightarrow (\varphi \circ f \text{ continue sur } D)$$

Petite remarque
Ces propriétés seront encore valables dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^2$, mais avant, il va falloir définir les notions de fonction de deux variables $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$!

★ Démonstration : Admises. ★

Exemples 6

E1 Considérons la fonction $g : (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.
On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \geqslant 0$, donc g est définie sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite :

- ✓ la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
- ✓ la fonction $\varphi = \sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Par composition, la fonction $\varphi \circ f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$; autrement dit, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Montrons que l'application $g : (x, y) \longmapsto \ln(y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.
On a :

- ✓ la fonction $f : (x, y) \longmapsto y$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ (car polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$;
- ✓ la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

Par composition, la fonction $\ln \circ f$ est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$; autrement dit, la fonction g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

✍ Rédaction
On veillera à détailler soigneusement les continuités des fonctions de deux variables... On peut d'ailleurs s'inspirer de cette rédaction pour justifier la continuité d'une composée de deux fonctions d'une variable...

À retenir...
Si $g : (x, y) \longmapsto \varphi(y)$, alors en notant $h : (x, y) \longmapsto y$, on a $g = \varphi \circ h$.
Ainsi, si φ est continue sur I, g est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de h continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans I et φ continue sur I.

IV Calcul différentiel

Dans toute cette partie, D désignera un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

> **Pourquoi ?**
> On se place sur un ouvert afin que l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ soit bien définie sur un ensemble non vide.

IV.1 A l'ordre 1…

Définitions 9 — **Dérivées partielles d'ordre 1, gradient**

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1 Soit $(x_0,y_0)\in D$. On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0,y_0)** lorsque l'application $f(.,y_0)$ est dérivable en x_0.
On note alors $\partial_1 f(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$.

D2 On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D lorsqu'elle en admet une en tout point de D. On note alors $\partial_1 f:(x,y)\longmapsto \partial_1 f(x,y)$ la fonction définie sur D, appelée **dérivée partielle de f d'ordre 1 par rapport à la première variable**.

D3 Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(x,y)\in D$, on appelle **gradient de f en (x_0,y_0)**, noté $\nabla f(x_0,y_0)$, la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\partial_1 f(x_0,y_0)\\ \partial_2 f(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

Si f admet des dérivées partielles sur D, on définit alors l'application $\nabla f:(x,y)\longmapsto \nabla f(x,y)$ sur D.

> **Autrement dit :**
> f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable lorsque l'application partielle associée est dérivable !

> **Définition**
> De la même façon, on définit $\partial_2 f$…

> **Vocabulaire**
> • ∂ se lit "d rond"
> • le symbole ∇ est appelé "nabla".

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 1 :**

- on fixe y et on dérive $x\longmapsto f(x,y)$ par rapport à x pour obtenir $\partial_1 f(x,y)$;
- on fixe x et on dérive $y\longmapsto f(x,y)$ par rapport à y pour obtenir $\partial_2 f(x,y)$.

> ✍ **Rédaction**
> On fixe y pour calculer $\partial_1 f(x,y)$, mais seulement dans notre tête. On ne fixe pas y dans la rédaction.

Exemple 7

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+xy+e^y$.

- Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\longmapsto x^2+xy+e^y$ est une fonction polynomiale en x, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$ et :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1 f(x,y)=2x+y$$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\longmapsto x^2+xy+e^y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction affine en y et de la fonction exponentielle.
  Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$ et :
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_2 f(x,y)=x+e^y$$

Définition 10 — **Fonction de classe $\mathscr{C}^1$**

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est de **classe $\mathscr{C}^1$** sur D lorsque les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur D.

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$**, on utilise les théorèmes généraux (propriétés 3, valables avec $\mathscr{C}^1$), comme nous le faisions dans le cas des fonctions d'une seule variable…

Exemple 8

Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour finir sur cette sous-partie :

Propriété 4

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, alors f est continue sur D.

⋆ Démonstration : Admise. ⋆

> ✘ **Attention !**
> L'existence des dérivées partielles ne garantit pas la continuité de la fonction sur tout D ! En effet, on peut encore une fois considérer la fonction étudiée dans Exemples 5 – E4, qui possède des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$, mais qui n'est toujours pas continue en $(0,0)$.
> En fait, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 ne fait que garantir la continuité des deux applications partielles.

IV.2 A l'ordre 2...

Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1, les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont des fonctions de deux variables définies sur l'ouvert D... On peut donc se demander si elles-mêmes admettent des dérivées partielles d'ordre 1...

Définitions 11 — **Dérivées partielles d'ordre 2, hessienne**

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

D1 On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur D**, notée $\partial^2_{1,1} f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D.

D2 On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première puis la seconde variable sur D**, notée $\partial^2_{2,1} f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D.

D3 Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(x_0, y_0) \in D$, on appelle **hessienne de f en (x_0, y_0)**, notée $\nabla^2 f(x_0, y_0)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x_0, y_0) & \partial^2_{1,2} f(x_0, y_0) \\ \partial^2_{2,1} f(x_0, y_0) & \partial^2_{2,2} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Petite remarque
- $\partial^2_{1,1} f = \partial_1(\partial_1 f)$
- $\partial^2_{2,1} f = \partial_2(\partial_1 f)$

Définition
De la même façon, on définit $\partial^2_{2,2} f$ et $\partial^2_{1,2} f$.

Définition 12 — **Fonction de classe $\mathscr{C}^2$**

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur D lorsque les fonctions $\partial^2_{1,1} f$, $\partial^2_{2,1} f$, $\partial^2_{1,2} f$ et $\partial^2_{2,2} f$ existent et sont continues sur D.

Exemple 9

Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^2$**, on utilise les théorèmes généraux (propriétés 3, valables avec $\mathscr{C}^2$), comme nous le faisions dans le cas des fonctions d'une seule variable...

On retrouve :

Propriété 5

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

Démonstration : Admise.

Exemple 10

Démontrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto x\mathrm{e}^{-y}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminons sa matrice hessienne en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- La fonction $(x, y) \longmapsto x$ est polynomiale, donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- ✓ La fonction $(x, y) \longmapsto y$ est polynomiale, donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$;
  ✓ la fonction $y \longmapsto \mathrm{e}^{-y}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
  Par composition, la fonction $(x, y) \longmapsto \mathrm{e}^{-y}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, f est le produit de deux fonctions $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = \mathrm{e}^{-y} \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = -x\mathrm{e}^{-y}$$

puis :

$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = 0 \quad ; \quad \partial^2_{1,2} f(x, y) = -\mathrm{e}^{-y} \quad ; \quad \partial^2_{2,1} f(x, y) = -\mathrm{e}^{-y} \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f(x, y) = x\mathrm{e}^{-y}$$

Ainsi :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{e}^{-y} \\ -\mathrm{e}^{-y} & x\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}$$

Un peu d'histoire
Il s'agit là encore d'Hermann Schwarz (1843-1921, allemand), et non de Laurent Schwartz (1915-2002, français). En 1734, Euler énonçait que le résultat était toujours valable, sans l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2... Schwarz fournit un contre-exemple en 1873 et démontra le théorème.

Théorème 2 — **Théorème de Schwarz**

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors $\partial^2_{1,2} f = \partial^2_{2,1} f$. En particulier, la hessienne de f en tout $(x, y) \in D$ est symétrique.

♡ **Astuce du chef !** ♡
On utilise ce théorème pour vérifier les calculs plutôt que pour essayer de gagner quelques secondes à dériver...

Démonstration : A notre portée, mais on l'admet tout de même.

IV.3 Développements limités (HP ?)

Théorème 3 — **Formules de Taylor-Young**

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x,y)\in D$ et f une fonction définie sur D.

T1 Si f est $\mathscr{C}^2$ sur D, alors il existe une fonction ε, continue sur D telle que :

- ✓ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)=0$
- ✓ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x+h,y+k)\in D$,

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+{}^t\nabla f(x,y)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} +\varepsilon(h,k)\times \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{=d\left((h,k),(0,0)\right)}$$

Autrement dit, pour tout $(x_0,y_0)\in D$, on a au voisinage de (x_0,y_0) :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+{}^t\nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+\varepsilon(x-x_0,y-y_0)\times d\big((x,y),(x_0,y_0)\big)$$

T2 Si f est $\mathscr{C}^2$ sur D, alors il existe une fonction ε, continue sur D telle que :

- ✓ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)=0$
- ✓ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x+h,y+k)\in D$,

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+{}^t\nabla f(x,y)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})}\cdot\nabla^2 f(x,y)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\varepsilon(h,k)\times\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}^{\,2}}_{=d\left((h,k),(0,0)\right)^2}$$

Autrement dit, pour tout $(x_0,y_0)\in D$, on a au voisinage de (x_0,y_0) :

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+{}^t\nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-x_0 & y-y_0\end{pmatrix}\cdot\nabla^2 f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$+\varepsilon(x-x_0,y-y_0)\times d\big((x,y),(x_0,y_0)\big)^2$$

Vocabulaire — Dans T1, l'expression trouvée est un $DL_1((x,y))$; et il s'agit d'un $DL_2((x,y))$ dans T2.

Petite remarque
- Comme dans le cas des fonctions d'une variable, si f admet DL, alors il est unique ; et c'est donc celui fournit par ce théorème.
- Ne pas hésiter à développer les produits matriciels pour avoir une expression différente, et peut-être préférable ?

⋆ Démonstration : Admis. ⋆

Comme la tangente à la courbe d'une fonction dérivable, on pourrait définir la notion de plan tangent d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D, et on en aurait une équation à partir du DL_1... Cette notion n'est cependant pas au programme.

V Extrema de fonctions de deux variables

V.1 Définitions et premiers exemples

Définitions 13 — **Extrema locaux et globaux**

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M_0\in D$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.

D1 On dit que f admet un **maximum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r>0\ /\ \forall M\in D\cap B(M_0,r),\ \ f(M)\leqslant f(M_0)$$

D2 On dit que f admet un **minimum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r>0\ /\ \forall M\in D\cap B(M_0,r),\ \ f(M)\geqslant f(M_0)$$

D3 On dit que f admet un **maximum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M\in D,\ \ f(M)\leqslant f(M_0)$$

D4 On dit que f admet un **minimum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M\in D,\ \ f(M)\geqslant f(M_0)$$

Autrement dit : Un maximum local en M_0 est un maximum sur un certain voisinage de M_0.

Petite remarque — Comme pour les fonctions d'une variable, un extremum global est en particulier un extremum local et la réciproque est évidemment fausse.

♣ Méthode ! — Pour montrer que $f(M_0)$ n'est pas un extremum global, il suffit de trouver un contre-exemple d'un point M tel que $f(M)>f(M_0)$ ou $f(M)<f(M_0)$ selon la nature étudiée.

Exemples 11

E1 Considérons la fonction $f:(x,y)\longmapsto x^2+y^2+xy+1$, définie sur $\mathbb{R}^2$. En reconnaissant le début d'un carré, démontrons que f possède un minimum global et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

Confusion d'objets ! — M_0 n'est pas l'extremum ! M_0 est un point...

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + xy + 1 \\ &= x^2 + xy + y^2 + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 \end{aligned}$$

♣ Méthode !
Avec $x^2 + xy$, on reconnaît le début du développement de $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2$ (méthode analogue à la mise sous forme canonique des fonctions polynomiales de degré 2).

On obtient ainsi :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geqslant 1$
- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 &\iff \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 = 1 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

☞ Rappel...
Une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls.

Conclusion : f possède un minimum global égal à 1 et atteint en $(0, 0)$.

E2 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- Démontrons : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$.

  Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

  ⋆ Si $(x, y) = (0, 0)$:
  On a $f(0, 0) = 0$, donc $f(0, 0) \leqslant \frac{1}{2}$.

  ⋆ Si $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) \leqslant \frac{1}{2} &\iff \frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2} \\ &\iff 2xy \leqslant x^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \\ &\iff (x - y)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 > 0$ (car $(x, y) \neq (0, 0)$)

  Cette dernière inégalité est vraie ; par équivalences, la première également.

  Conclusion : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$.

- Déduisons-en que $\frac{1}{2}$ est un maximum global de f et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

  Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

  ⋆ Si $(x, y) = (0, 0)$:
  On a $f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$.

  ⋆ Si $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{1}{2} &\iff (x - y)^2 = 0 \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

Conclusion : f admet un maximum global égal à $\frac{1}{2}$ et atteint en les points de coordonnées (x, x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4 — **Théorème des bornes**

Si une fonction est continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, alors cette fonction est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

Autrement dit : Si f est continue sur une partie fermée et bornée, alors f admet un maximum global et un minimum global sur cette partie.

Démonstration : Admis.

V.2 Étude des extrema locaux

Définition 14 — **Point critique**

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D à valeurs réelles.
On dit que M_0 est un **point critique** de f lorsque $\nabla f(M_0) = 0_{2,1}$.

Autrement dit, (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2 f(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right.$.

Important ! Comme dans le cas des fonctions d'une variable, l'hypothèse "D est un ouvert" est fondamentale. En effet, sinon, M_0 pourrait être sur la frontière de D et fournir un extremum local sans pour autant que le gradient soit nul en M_0.

Théorème 5 — **Condition nécessaire d'extrema local sur un ouvert**

Soient ***D* un ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $M_0 \in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D à valeurs réelles.
Si f admet un extremum local en M_0, alors M_0 est un point critique de f.

Autrement dit : Les points critiques fournissent des extrema locaux *possibles*.

Démonstration : Admis.

✘ Attention ! Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque est fausse... On pense à la fonction cube pour les fonctions d'une variable.

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour démontrer qu'un point critique ne fournit pas un extremum local,** on cherche à trouver une direction sur laquelle f lui est strictement supérieure et une direction selon f lui est strictement inférieure.

Exemples 12

E1 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, puis que f ne possède pas d'extremum local en ce point.

- La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = y \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = x$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Conclusion : $(0, 0)$ est l'unique point critique de f.

- Ensuite, on a $f(0, 0) = 0$ puis :
  - ⋆ pour tout $x \neq 0$, $f(x, x) = x^2 > f(0, 0)$: f ne possède pas de maximum en $(0, 0)$;
  - ⋆ pour tout $x \neq 0$, $f(x, -x) = -x^2 < f(0, 0)$: f ne possède pas de minimum en $(0, 0)$.

Conclusion : $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, mais f n'admet ni maximum local ni minimum local en $(0, 0)$.

E2 Considérons la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, puis que f ne possède pas d'extremum local en ce point.

- La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = 3y^2$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{array} \right. \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Conclusion : $(0, 0)$ est l'unique point critique de f.

- Ensuite, on a $f(0,0)=0$ puis :
  - ⋆ pour tout $x>0$, $f(x,x)=2x^3>f(0,0)$: f ne possède pas de maximum en $(0,0)$;
  - ⋆ pour tout $x<0$, $f(x,x)=2x^3<f(0,0)$: f ne possède pas de minimum en $(0,0)$.

Conclusion : $(0,0)$ est l'unique point critique de f, mais f n'admet ni maximum local ni minimum local en $(0,0)$.

Petite remarque

Il est parfois plus simple de n'étudier que la limite...
Affirmer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,x)=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x,x)=0^-$ suffit pour conclure...

Théorème 6 — Nature des points critiques

Soient D **un ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in D$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D à valeurs réelles.

T1 Si (x_0,y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0,y_0).

T2 Si (x_0,y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0,y_0).

T3 Si (x_0,y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont **non nulles** et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0,y_0).

T4 Si (x_0,y_0) est un point critique de f et que qu'au moins une des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ est nulle, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

✘ Attention !

Dans les deux premiers cas, **on peut conclure sur un extremum local, pas un extremum global !**

Vocabulaire

On parle alors de **point col** ou **point selle** (de cheval).

⋆ Démonstration : A notre portée, mais on l'admet tout de même... ⋆

♣ Méthode 5 ♣ Pour étudier les points critiques d'une fonction f,

1. on s'assure de se placer sur un ouvert et que f est $\mathscr{C}^2$ ($\mathscr{C}^1$ pour les points critiques, $\mathscr{C}^2$ pour étudier leur nature) sur cet ouvert,
2. on recherche les points critiques : ce sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{array}\right.$

   Attention : ce n'est presque jamais un système linéaire... Tous les moyens sont bons si ce n'est pas le cas : substitution, disjonction de cas, analyse-synthèse...
3. on détermine la hessienne de f en chacun des points critiques,
4. ensuite on peut déterminer les valeurs propres de chaque hessienne,
5. puis :
   - dans le cas de T1, T2, et T3 on peut conclure directement ;
   - dans le cas de T4, tout est possible...
     - ⋆ pour montrer que c'est un point col, on pourra mettre en place la méthode 4 ;
     - ⋆ pour montrer que c'est un extremum local, on pourra calculer $f(x_0+h,y_0+k)$ explicitement ou effectuer un $\mathrm{DL}_2((x_0,y_0))$.
6. pour étudier le caractère global d'un extremum local :
   - pour montrer que f possède un minimum (ou maximum) global en (x_0,y_0), on doit montrer :
   $$\forall (x,y)\in D,\ \ f(x,y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$$
   (ou $\leqslant 0$) Là encore, on préfère parfois établir :
   $$\forall (x,y)\in D,\ \ f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$$
   - pour montrer que $f(x_0,y_0)$ n'est pas un minimum (ou maximum) global, on peut chercher un contre-exemple de point (x_1,y_1) tel que $f(x_1,y_1)<f(x_0,y_0)$ (ou $f(x_1,y_1)>f(x_0,y_0)$).

♣ Méthode !

Bien entendu, si l'énoncé guide, on se laisse faire !

♡ Astuce du chef ! ♡

J'ai bien écrit "on peut déterminer les valeurs propres", pas "on doit"...
En effet :
- λ est VP de $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ssi $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$
- on rappelle que le produit des racines du polynômes X^2-sX+p est égal à p et la somme à s...

Ainsi :
- si $ad-bc>0$, alors les deux VP sont non nulles et de même signe, signe donné par le signe de $a+d$
- si $ad-bc<0$, alors les deux VP sont non nulles et de signes opposés
- si $ad-bc=0$, alors au moins une des VP est nulle

♣ Méthode !

Pour montrer que $f(x_0,y_0)$ est un maximum/minimum global, on peut aussi, à x fixé, étudier le signe de la fonction $y\longmapsto f(x,y)-f(x_0,y_0)$ (en utilisant toutes les méthodes usuelles pour étudier le signe d'une fonction...).

Exemples 13

E1 Étudions les points critiques de la fonction $f:(x,y)\longmapsto x^2-y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$\partial_1 f(x,y)=2x\quad;\quad \partial_2 f(x,y)=-2y$$
puis :
$$\partial^2_{1,1} f(x,y)=2\quad;\quad \partial^2_{1,2} f(x,y)=0$$
$$\partial^2_{2,1} f(x,y)=0\quad;\quad \partial^2_{2,2} f(x,y)=-2$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{array} \right. \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Conclusion : $(0, 0)$ est l'unique point critique de f.

- Ensuite :

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.
Les valeurs propres de $\nabla^2 f(0, 0)$ sont donc -2 et 2, qui sont non nulles et de signes opposés.

Conclusion : $(0, 0)$ est l'unique point critique de f et f admet un point col en $(0, 0)$.

E2 Démontrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ possède un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un minimum local en ce point critique. Établissons qu'il s'agit même d'un minimum global.

- La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x + y - 3 \;\; ; \;\; \partial_2 f(x, y) = x + 2y - 6$$

puis :

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x, y) = 2 \;\; &; \;\; \partial^2_{1,2} f(x, y) = 1 \\ \partial^2_{2,1} f(x, y) = 1 \;\; &; \;\; \partial^2_{2,2} f(x, y) = 2 \end{aligned}$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + \;\; y = 3 \\ \;\; x + 2y = 6 \end{array} \right. \\ &\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} 2x + \;\; y = 3 \\ \qquad 3y = 9 \end{array} \right. \\ &\iff (x, y) = (0, 3) \end{aligned}$$

Conclusion : $(0, 3)$ est l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$.

- Ensuite :

$$\nabla^2 f(0, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet pour valeurs propres 1 et 3...
Les valeurs propres de $\nabla^2 f(0, 3)$ sont donc toutes deux strictement positives.
Conclusion : $(0, 3)$ est l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ et f admet un minimum local en $(0, 3)$.

- Montrons que f possède un minimum global en $(0, 3)$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 3) &= x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 9 \\ &= x^2 + (y - 3)x + (y - 3)^2 \\ &= \left(x + \frac{y - 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 3}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 \\ &= \left(x + \frac{y - 3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y - 3)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; f(x, y) \geqslant f(0, 3)$$

Conclusion : $(0, 3)$ est l'unique point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ et f admet un minimum global en $(0, 3)$, égal à -9.

♣ Méthode !

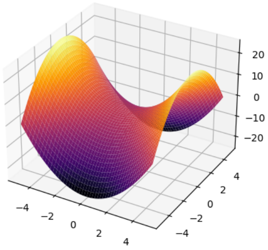
Puisque, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \longmapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 9$ est une fonction polynomiale du second degré en y à coefficient dominant positif, pour montrer qu'elle est positive sur $\mathbb{R}$, on peut également montrer que son discriminant est négatif ou nul (il faut $-3x^2$, c'est donc bien le cas...).

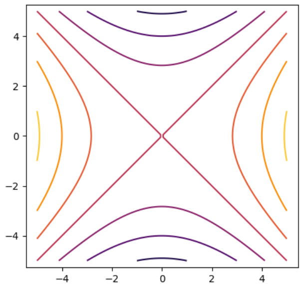
Petite remarque

Il n'est pas toujours aisé de bien voir la forme permettant de conclure pour ce genre de calculs. Il aurait peut-être été plus simple de montrer que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $f(0 + h, 3 + k) - f(0, 3) \geqslant 0$... A faire !

EXEMPLES 14

E1 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:





Déterminons les lignes de niveaux 0 et 1 de f.

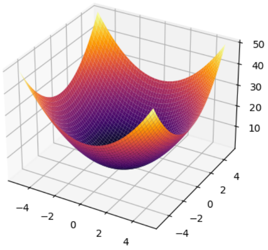
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $f(x, y) = 0 \iff x^2 = y^2 \iff \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases}$.

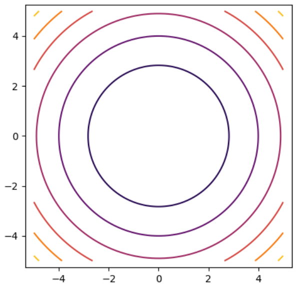
  La ligne de niveau 0 de f est $\{(x, x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $f(x, y) = 1 \iff x^2 = y^2 + 1 \iff \begin{cases} x = \sqrt{y^2 + 1} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{y^2 + 1} \end{cases}$.

  La ligne de niveau 1 de f est $\{(\sqrt{y^2 + 1}, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\sqrt{y^2 + 1}, y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

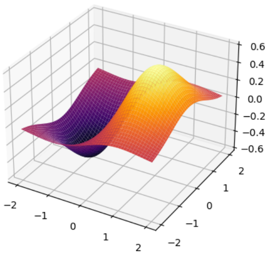
E2 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:

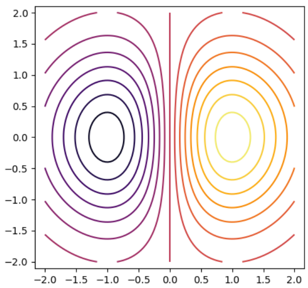




Que dire des lignes de niveaux de f ? Les lignes de niveaux négatifs sont vides ; la ligne de niveau 0 est $\{(0, 0)\}$ et, pour tout $a > 0$ la ligne de niveau a de f est le cercle de centrée $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a}$.

E3 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto x e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ sur $[-2; 2] \times [-2; 2]$:





E4 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$: