

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●○ - Démonstrations de cours (à faire en autonomie)

Démontrer les résultats obtenus sur les fonctions de répartition, les espérances et variances des lois uniformes et exponentielles.

EXERCICE 2 - ●○○ - Amusement sur la loi normale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 1. On note $\alpha = \mathbb{P}([X \leq -2])$. Exprimer en fonction de α les probabilités suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\mathbb{P}([X \geq -2])$ | 3. $\mathbb{P}([X \geq 4])$ |
| 2. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 1])$ | 4. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 4])$ |

EXERCICE 3 - ●○○ - Du minimum...

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- On suppose que X_1, \dots, X_n suivent toutes la loi uniforme sur $[0; 1]$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
- On suppose que X_1, \dots, X_n suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

EXERCICE 4 - ●●● - Somme de VA à densité

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y telles que au moins f_X ou f_Y est bornée, alors la variable aléatoire $X + Y$ est à densité et admet pour densité la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

- Supposons que X et Y sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $X + Y$.
- Supposons que X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 5 - ●●○ - Loi de Laplace

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

- Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire de densité f .
- Déterminer la fonction de répartition de X .
- Démontrer que la variable aléatoire $|X|$ est à densité et reconnaître sa loi.
- En déduire un programme Python permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X .

EXERCICE 6 - ●●○ - Loi logistique

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

- Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire admettant F comme fonction de répartition. Donner une densité de X , notée f .
- Étudier la parité de la fonction f . En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
- Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.
- En déduire un programme Python permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X .

CONCOURS

EXERCICE 7 – ●●○ – EDHEC 2001 E (Loi de Rayleigh de paramètre 1)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. *Dans la suite, on considère une variable aléatoire X de densité f .*

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

3. Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire le réel μ pour lequel $\mathbb{P}([X \leq \mu]) = \frac{1}{2}$.

4. On appelle **mode de la variable aléatoire X** tout réel x en lequel f atteint son maximum.
Montrer que X n'admet qu'un seul mode, notée M_0 , et le déterminer.

5. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

En déduire que X possède une espérance et montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

6. Justifier que X admet une variance et la calculer.

7. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.

7.a. Démontrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7.b. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simule_X():` qui permet de simuler une réalisation de X .

7.c. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction `mystere` ci-dessous.

```
1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3
4 def mystere():
5     L=[simule_X() for k in range(10000)]
6     return np.mean(L)
```

EXERCICE 8 – ●●○ – Ecricome 2000 E

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note f une densité de X et F sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in]-\infty; 0]$, $f(t) = 0$

(ii) pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f(t) > 0$

(iii) f est continue sur $]0; +\infty[$

1. Démontrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$.
Cet unique réel, que l'on notera m , sera appelé **médiane de X** .

2. Dans cette question, on suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que X satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de X .

3. Dans cette question, on suppose que la densité de X est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ te^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

3.a. Vérifier que la fonction f est bien une densité de probabilité et qu'elle satisfait aux hypothèses de début de l'exercice.

3.b. Déterminer la fonction de répartition F de X .

3.c. Démontrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie : $1 \leq m \leq 2$ (on donne $6 < e^2 < 9$).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m . On introduit pour cela la fonction $g : x \mapsto \ln(2x + 2)$, définie sur $[1; 2]$.

3.d. Établir : $g(m) = m$.

3.e. Démontrer que pour tout $x \in [1; 2]$, $g(x) \in [1; 2]$ et $|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$.

3.f. On considère à présent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de sa limite.

3.g. Écrire une fonction Python d'en-tête `approx_m(eps)` : qui prend en entrée un réel strictement positif eps et renvoie une valeur approchée de m à eps -près.

4. On revient au cas général et on suppose que X admet une espérance et une variance, notés respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. On note toujours m la médiane de X .

4.a. Démontrer les inégalités :

$$\mathbb{V}(X) \geq \int_0^m (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt ; \quad \mathbb{V}(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt$$

4.b. En distinguant les cas $m \leq \mathbb{E}(X)$ et $m > \mathbb{E}(X)$, établir :

$$|m - \mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{2\mathbb{V}(X)}$$

EXERCICE 9 – ●●● - Ecricome 2003 E

Sous diverses hypothèses, l'exercice différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

PARTIE 1

On suppose que A produit 60% des objets et B en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est 0,1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est 0,2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A .

2. On suppose que le nombre d'objets produits par A en une heure est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par A en une heure.

2.a. Rappeler la loi de Y , son espérance et sa variance.

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in X(\Omega)$, donner $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X=k])$. On distingue les cas $k \leq n$ et $k > n$.

2.c. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

PARTIE 2.

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

3. Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera Z .

4. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z .

5. Démontrer que Z admet une espérance et la déterminer.

6. La variable aléatoire Z admet-elle une variance ?

7. Dans cette question, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z .

7.a. Déterminer les probabilités :

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq 2]) ; \quad \mathbb{P}([Z_1 \leq 3]) ; \quad \mathbb{P}_{[Z_1 \geq 2]}([Z_1 \leq 3])$$

7.b. On note $T = \max(Z_1; Z_2)$. Exprimer la fonction de répartition de T en fonction de F_Z . En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

PARTIE 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.

8. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et w de N .

9. On note S la variable aléatoire égale au temps total de fabrication d'une pièce. Déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

EXERCICE 10 – ●●● - EML 2019 E

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A. DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V . On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty]$.

1. 1.a. Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$.

1.b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt = \mathbb{P}([U \leq V])$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t)dt$.

3. Exemple : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ .

3.a. Rappeler, pour tout t de \mathbb{R}^+ , une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

3.b. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

PARTIE B. UNE APPLICATION

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ . On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de \mathbb{N}^* tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

4.a. Calculer, pour tout t de \mathbb{R}^+ , $\mathbb{P}([M_n > t])$.

4.b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur \mathbb{R} .

Reconnaitre la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

5. 5.a. Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) = \mathbb{P}([T_1 \leq T_0]) = \frac{1}{2}$.

5.b. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$.

En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^* , une expression de $\mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$ en fonction de n .

5.c. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \frac{1}{n(n+1)}$.

5.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

EXERCICE 11 - ●●● - EDHEC 2016 E

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z , indépendante de U et V , dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = p \text{ et } \mathbb{P}([Z = -1]) = 1 - p$$

- Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note F_X , F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X , U et V .

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x .

2. 2.a. Établir, grâce au système complet d'événements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$

2.b. Expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leq x < -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 < x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

2.c. Démontrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_X .

2.d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

3.a. Vérifier que l'on a :

$$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$$

3.b. Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

3.c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. 4.a. Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p .

Déterminer la loi de $2T - 1$.

4.b. Écrire une fonction `Python` permettant de simuler une réalisation de X .