

# EXERCICES DU CHAPITRE 11

## TOUT SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

### TECHNIQUE

#### EXERCICE 1 - ●●● - Démonstrations de cours (à faire en autonomie)

Démontrer les résultats obtenus sur les fonctions de répartition, les espérances et variances des lois uniformes et exponentielles.

#### EXERCICE 2 - ●●● - Amusement sur la loi normale

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 1. On note  $\alpha = \mathbb{P}([X \leq -2])$ . Exprimer en fonction de  $\alpha$  les probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}([X \geq -2])$
- $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 1])$
- $\mathbb{P}([X \geq 4])$
- $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 4])$

#### EXERCICE 3 - ●●● - Du minimum...

Soient  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  ainsi que  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On note  $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  suivent toutes la loi uniforme sur  $[0; 1]$ . Démontrer que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  suivent toutes la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Démontrer que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

#### EXERCICE 4 - ●●● - Somme de VA à densité

On admet que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de densités respectives  $f_X$  et  $f_Y$  telles que au moins  $f_X$  ou  $f_Y$  est bornée, alors la variable aléatoire  $X + Y$  est à densité et admet pour densité la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

- Supposons que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de  $X + Y$ .
- Supposons que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de loi uniforme sur  $[0; 1]$ . Déterminer la loi de  $X + Y$ .

### ENTRAÎNEMENT

#### EXERCICE 5 - ●●● - Loi de Laplace

Considérons la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ .

- Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite, on notera  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .
- Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
- Démontrer que la variable aléatoire  $|X|$  est à densité et reconnaître sa loi.
- En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire  $X$ .

#### EXERCICE 6 - ●●● - Loi logistique

On considère la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$ .

- Démontrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Dans la suite, on notera  $X$  une variable aléatoire admettant  $F$  comme fonction de répartition. Donner une densité de  $X$ , notée  $f$ .
- Étudier la parité de la fonction  $f$ . En déduire que  $X$  admet une espérance et la déterminer.
- Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $]0; 1[$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ .
- En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire  $X$ .

### EXERCICE 7 – ●●● – EDHEC 2001 E (Loi de Rayleigh de paramètre 1)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ .
2. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .
3. Déterminer la médiane de  $X$ , c'est-à-dire le réel  $\mu$  pour lequel  $\mathbb{P}(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$ .
4. On appelle **mode de la variable aléatoire**  $X$  tout réel  $x$  en lequel  $f$  atteint son maximum. Montrer que  $X$  n'admet qu'un seul mode, notée  $M_0$ , et le déterminer.
5. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En déduire que  $X$  possède une espérance et montrer que  $\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .
6. Justifier que  $X$  admet une variance et la calculer.
7. On pose  $Y = X^2$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire. On note  $F_Y$  sa fonction de répartition.
  - 7.a. Démontrer que  $Y$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
  - 7.b. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X()` : qui permet de simuler une réalisation de  $X$ .
  - 7.c. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction `mystere` ci-dessous.

```
1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3
4 def mystere():
5     L=[simule_X() for k in range(10000)]
6     return np.mean(L)
```

### EXERCICE 8 – ●●● – Ecricome 2000 E

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On note  $f$  une densité de  $X$  et  $F$  sa fonction de répartition. On fait les trois hypothèses suivantes :

- (i) pour tout  $t \in ]-\infty; 0[$ ,  $f(t) = 0$
- (ii) pour tout  $t \in [0; +\infty[$ ,  $f(t) > 0$
- (iii)  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$

1. Démontrer que l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  possède une unique solution sur  $]0; +\infty[$ . Cet unique réel, que l'on notera  $m$ , sera appelé **médiane de  $X$** .
2. Dans cette question, on suppose que  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Démontrer que  $X$  satisfait aux hypothèses du début de l'exercice et déterminer la médiane de  $X$ .
3. Dans cette question, on suppose que la densité de  $X$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ te^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

- 3.a. Vérifier que la fonction  $f$  est bien une densité de probabilité et qu'elle satisfait aux hypothèses de début de l'exercice.
- 3.b. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- 3.c. Démontrer, sans chercher à la calculer, que la médiane  $m$  de  $X$  vérifie :  $1 \leq m \leq 2$  (on donne  $6 < e^2 < 9$ ).

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de  $m$ . On introduit pour cela la fonction  $g : x \mapsto \ln(2x + 2)$ , définie sur  $[1; 2]$ .

- 3.d. Établir :  $g(m) = m$ .
- 3.e. Démontrer que pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $g(x) \in [1; 2]$  et  $|g(x) - m| \leq \frac{1}{2}|x - m|$ .
- 3.f. On considère à présent la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ . Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que la valeur de sa limite.

- 3.g. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `approx_m(eps)` : qui prend en entrée un réel strictement positif  $eps$  et renvoie une valeur approchée de  $m$  à  $eps$ -près.

4. On revient au cas général et on suppose que  $X$  admet une espérance et une variance, notés respectivement  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ . On note toujours  $m$  la médiane de  $X$ .

4.a. Démontrer les inégalités :

$$\mathbb{V}(X) \geq \int_0^m (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt ; \quad \mathbb{V}(X) \geq \int_m^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt$$

4.b. En distinguant les cas  $m \leq \mathbb{E}(X)$  et  $m > \mathbb{E}(X)$ , établir :

$$|m - \mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{2\mathbb{V}(X)}$$

## EXERCICE 9 - ●●○ - Ecrimage 2003 E

Sous diverses hypothèses, l'exercice diffère de situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage  $A$  et  $B$  qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

### PARTIE 1

On suppose que  $A$  produit 60% des objets et  $B$  en produit 40%. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne  $A$  soit défectueux est 0,1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne  $B$  soit défectueux est 0,2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne de la chaîne  $A$ .

2. On suppose que le nombre d'objets produits par  $A$  en une heure est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 20$ . On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre d'objets défectueux produits par  $A$  en une heure.

2.a. Rappeler la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

2.b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $k \in X(\Omega)$ , donner  $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k])$ . On distinguera les cas  $k \leq n$  et  $k > n$ .

2.c. En déduire que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 2.

### PARTIE 2.

On considère la fonction  $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

3. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera  $Z$ .

4. Déterminer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$ .

5. Démontrer que  $Z$  admet une espérance et la déterminer.

6. La variable aléatoire  $Z$  admet-elle une variance ?

7. Dans cette question, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce par la chaîne  $A$  (respectivement  $B$ ) est une variable aléatoire  $Z_1$  (respectivement  $Z_2$ ) où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que  $Z$ .

7.a. Déterminer les probabilités :

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq 2]) ; \quad \mathbb{P}([Z_1 \leq 3]) ; \quad \mathbb{P}_{[Z_1 \geq 2]}([Z_1 \leq 3])$$

7.b. On note  $T = \max(Z_1; Z_2)$ . Exprimer la fonction de répartition de  $T$  en fonction de  $F_Z$ . En déduire que  $T$  est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

### PARTIE 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne  $A$  puis par la chaîne  $B$ . Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne  $A$  est une variable aléatoire  $M$  suivant la loi exponentielle de paramètre 2. Le temps de passage, exprimé en minutes, pour un objet sur la chaîne  $B$  est une variable aléatoire  $N$  suivant la loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

8. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité  $v$  de  $M$  et  $w$  de  $N$ .

9. On note  $S$  la variable aléatoire égale au temps total de fabrication d'une pièce. Déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

## EXERCICE 10 - ●●○ - EML 2019 E

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### PARTIE A. DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives  $f_U$  et  $f_V$  et de fonctions de répartition respectives  $F_U$  et  $F_V$ . On suppose que les fonctions  $f_U$  et  $f_V$  sont nulles sur  $] -\infty, 0[$  et continues sur  $[0, +\infty[$ .

1. 1.a. Justifier :  $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$ .

1.b. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt$  converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt = \mathbb{P}([U \leq V])$$

2. En déduire :  $\mathbb{P}([U > V]) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t)dt$ .

3. **Exemple :** Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On suppose dans cette question que  $U$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  et que  $V$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

3.a. Rappeler, pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ , une expression de  $F_U(t)$  et de  $f_V(t)$ .

3.b. En déduire :  $\mathbb{P}([U > V]) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ .

## PARTIE B. UNE APPLICATION

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ . On considère une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . On définit ensuite la variable aléatoire  $N$  égale au plus petit entier  $k$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que  $T_k \leq T_0$  si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit la variable aléatoire  $M_n$  par :  $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$ .
  - 4.a. Calculer, pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{P}(M_n > t)$ .
  - 4.b. En déduire la fonction de répartition de  $M_n$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Reconnaître la loi de  $M_n$  et préciser son (ses) paramètre(s).
5. 5.a. Montrer :  $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}$ .  
5.b. Justifier :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, [N > n] \cup [N = 0] = [M_n > T_0]$ .  
En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , une expression de  $\mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$  en fonction de  $n$ .  
5.c. Montrer alors :  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ .  
5.d. En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(N = 0)$ .
6. La variable aléatoire  $N$  admet-elle une espérance ?

## EXERCICE 11 - ●●● - EDHEC 2016 E

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $p$  un réel de  $]0, 1[$ .
- On considère deux variables aléatoires indépendantes  $U$  et  $V$ , telles que  $U$  suit la loi uniforme sur  $[-3, 1]$ , et  $V$  suit la loi uniforme sur  $[-1, 3]$ .
- On considère également une variable aléatoire  $Z$ , indépendante de  $U$  et  $V$ , dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = -1) = 1 - p$$

- Enfin, on note  $X$  la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note  $F_X, F_U$  et  $F_V$  les fonctions de répartition respectives des variables  $X, U$  et  $V$ .

1. Donner les expressions de  $F_U(x)$  et  $F_V(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. 2.a. Établir, grâce au système complet d'événements  $([Z = 1], [Z = -1])$ , que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$

- 2.b. Expliciter  $F_X(x)$  dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leq x < -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 < x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

- 2.c. Démontrer que  $X$  est une variable aléatoire à densité et en donner une densité  $f_X$ .

- 2.d. Établir que  $X$  admet une espérance  $\mathbb{E}(X)$  et une variance  $\mathbb{V}(X)$ , puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que  $X$  possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

- 3.a. Vérifier que l'on a :

$$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$$

- 3.b. Dédire de l'égalité précédente que  $X$  possède une espérance et retrouver la valeur de  $\mathbb{E}(X)$ .

- 3.c. En déduire également que  $X$  possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de  $\mathbb{E}(X^2)$ .

4. 4.a. Soit  $T$  une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  
Déterminer la loi de  $2T - 1$ .
- 4.b. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de  $X$ .