Exercices du chapitre 13
Fonctions de deux variables

Exercice 1 - ●●○
Déterminer les points critiques et leur nature (locale) pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
2. $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + 4xy - 2$, définie sur $\mathbb{R}^2$
3. $f : (x, y) \longmapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
4. $f : (x, y) \longmapsto y\big(x^2 + \ln(y)^2\big)$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$
5. $f : (x, y) \longmapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$, définie sur $\mathbb{R}^2$ (plus difficile)

Exercice 2 - ●●○ - EDHEC 2005 E
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x\mathrm{e}^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. 2.a. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
   2.b. En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. 3.a. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   3.b. Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. Préciser sa nature et sa valeur.
4. 4.a. Établir : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geqslant x\mathrm{e}^x$.
   4.b. En étudiant la fonction $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé en question 2.b. est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 - ●●○ - Extrema globaux
On considère la fonction $f : (x, y) \longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de f et étudier leur nature locale.
2. En étudiant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \longmapsto f(x, y)$, démontrer que les extrema trouvés en question précédente sont globaux.

Exercice 4 - ●●○ - EDHEC 2021 E
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1. 1.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   1.b. Déterminer les points critiques de f.
   1.c. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
   1.d. Cet extremum est-il global ?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x, 1)$$

   2.a. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution que l'on notera u_n.
   2.b. On note h la restriction de g à $[1; +\infty[$.
      2.b.i. Donner le tableau de variations de h^{-1}.
      2.b.ii. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
      2.b.iii. En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$.

Exercice 5 - ●●● - Type oral
On considère la fonction $f : (x, y) \longmapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Justifier que f admet un maximum global sur $[0; 1] \times [0; 1]$ et le déterminer.

Exercice 6 - ●●● - HEC 2008 E
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère le nuage de points $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\big)$ et on suppose que les réels $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux, et qu'il en est de même des réels $y_1, \dots, y_n$.
On notera $\overline{x}$ la moyenne du n-uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ et σ_x sont écart-type. On définit également $\overline{y}$ et σ_y pour la série y.

On considère ensuite la fonction $f : (a, b) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2$.

1. Rappeler l'expression de $\overline{x}$ et σ_x.
2. Justifier que le coefficient de corrélation linéaire du couple (x, y), noté $r(x, y)$, existe et rappeler son expression.
3. Justifier que la fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Démontrer que f possède un unique point critique, noté $(\widehat{a}, \widehat{b})$, que l'on exprimera en fonction de $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x^2 et $\mathrm{Cov}(x, y)$.
5. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f.
6. Établir : $f(\widehat{a}, \widehat{b}) = n\sigma_y^2\big(1 - r(x, y)^2\big)$.
7. En déduire que $|r(x, y)| \leqslant 1$. Que dire du nuage de points lorsque $|r(x, y)| = 1$?