

EXERCICES DU CHAPITRE 13

TOUT SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

TECHNIQUE

EXERCICE 1 – ●●● – Démonstrations de cours (à faire en autonomie)

Démontrer les résultats obtenus sur les fonctions de répartition, les espérances et variances des lois uniformes et exponentielles.

EXERCICE 2 – ●●● – Amusement sur la loi normale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 1. On note $\alpha = \mathbb{P}([X \leq -2])$. Exprimer en fonction de α les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}([X \geq -2])$
2. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 1])$
3. $\mathbb{P}([X \geq 4])$
4. $\mathbb{P}([-2 \leq X \leq 4])$

EXERCICE 3 – ●●● – Du minimum...

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. On suppose que $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur $[0; 1]$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. On suppose que $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que M_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

EXERCICE 4 – ●●● – Somme de VA à densité

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y telles que au moins f_X ou f_Y est bornée, alors la variable aléatoire $X + Y$ est à densité et admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

1. Supposons que X et Y sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Supposons que X et Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 5 – ●●● – Loi de Laplace

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire de densité f .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Démontrer que la variable aléatoire $|X|$ est à densité et reconnaître sa loi.
4. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X .

EXERCICE 6 – ●●● – Loi logistique

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

1. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Dans la suite, on notera X une variable aléatoire admettant F comme fonction de répartition. Donner une densité de X , notée f .
2. Étudier la parité de la fonction f . En déduire que X admet une espérance et la déterminer.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.
4. En déduire un programme **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X .

EXERCICE 7 - ●●● - EDHEC 2001 E (Loi de Rayleigh de paramètre 1)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire X de densité f .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
3. Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire le réel μ pour lequel $\mathbb{P}([X \leq \mu]) = \frac{1}{2}$.
4. On appelle **mode de la variable aléatoire** X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X n'admet qu'un seul mode, notée M_0 , et le déterminer.
5. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. En déduire que X possède une espérance et montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
6. Justifier que X admet une variance et la calculer.
7. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition.
 - 7.a. Démontrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
 - 7.b. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X()` : qui permet de simuler une réalisation de X .
 - 7.c. Expliquer ce que permet d'obtenir l'exécution de la fonction **mystere** ci-dessous.

```

1 import numpy.random as rd
2 import numpy as np
3
4 def mystere():
5     L=[simule_X() for k in range(10000)]
6     return np.mean(L)
    
```

EXERCICE 8 - ●●● - EDHEC 2016 E

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z , indépendante de U et V , dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z = -1]) = 1 - p$$

- Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V .

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x .
2. 2.a. Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$

- 2.b. Expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leq x < -1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 < x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

- 2.c. Démontrer que X est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_X .

- 2.d. Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

- 3.a. Vérifier que l'on a :

$$X = U \frac{1+Z}{2} + V \frac{1-Z}{2}$$

- 3.b. Dédurre de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

- 3.c. En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

4. 4.a. Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Déterminer la loi de $2T - 1$.

- 4.b. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de X .