Exercices du chapitre 13
Convergence de suites de variables aléatoires

Technique

Exercice 1 - ●●○○
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On note Φ sa fonction de répartition.

1. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 1-\Phi(x) \leqslant \dfrac{1}{2x^2}$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1-\Phi(x)\big)\,dx$ puis calculer sa valeur.

Exercice 2 - ●●○○ - Fonction de répartition empirique
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi, de fonction de répartition notée F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_{n,x}$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_{n,x}(\omega) = \text{Card}\left(\left\{i \in [\![1;n]\!] \ /\ X_i(\omega) \leqslant x\right\}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_{n,x} = \dfrac{1}{n}Z_{n,x}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{1}_{[X_i \leqslant x]}$ la variable aléatoire définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{[X_i\leqslant x]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [X_i \leqslant x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Donner la loi de $\mathbb{1}_{[X_i\leqslant x]}$.
2. Déterminer la loi de $Z_{n,x}$ puis donner son espérance et sa variance.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|T_{n,x} - F(x)| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

Exercice 3 - ●●○○
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance et une variance. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ et qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \ell$.

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left((X_n-\ell)^2\right) = \mathbb{V}(X_n) + \big(\mathbb{E}(X_n-\ell)\big)^2$.
2. En déduire : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|X_n - \ell| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

Exercice 4 - ●○○○
On définit, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x e^{\frac{-n^2x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet pour densité f_n. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5 - ●●●○
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi uniforme sur $\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$. Démontrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

Exercice 6 - ●●○○
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
Démontrer que $(nY_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Entraînement

Exercice 7 - ●○○○ - Classique

Considérons une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$.

1. On considère la variable aléatoire $X^* = \dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}$. Donner l'espérance et la variance de X^*.
2. Par quelle loi peut-on approcher la variable aléatoire X^* si n est assez grand ?
   Montrer qu'alors, pour n suffisamment grand, une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([X \geqslant N]\big)$ est $\Phi\left(\dfrac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Exercice 8 - ●○○○ - Classique

Considérons une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{P}(5)$. On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. Quelle est la loi de Y_k ?
2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\Phi(\alpha) = 0,99$. Établir : $\alpha > 0$.
3. Justifier que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\big([Y_k - 5k > \alpha\sqrt{5k}]\big) = 0,01$.

Exercice 9 - ●●○○

Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, avec $p \in]0;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   1.a. Déterminer la loi de Y_n.
   1.b. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_n; Y_{n+1})$.
2. Justifier que si $|n-p| \geqslant 2$, alors $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_p) = 0$.
3. Démontrer : $\mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   4.a. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.
   4.b. En déduire : $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

Concours

Exercice 10 - ●●○○ - EDHEC 2012 E

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$) et FACE avec la probabilité $q = 1-p$.
On lance plusieurs fois, de façons indépendantes, cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu PILE
- soit si l'on a obtenu n fois FACE

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement "obtenir PILE au $k^{\text{ème}}$ lancer" et $F_k = \overline{P_k}$.
On définit également les variables aléatoires suivantes :

- T_n, donnant le nombre de lancers effectués
- X_n le nombre de PILE obtenus
- Y_n le nombre de FACE obtenus

On admet que ces variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Écrire un programme **Python** simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de chacune des variables aléatoires T_n, X_n et Y_n.
2. **Loi de T_n.**
   2.a. Démontrer que $T_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
   2.b. Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $\mathbb{P}\big([T_n = k]\big)$.
   2.c. Déterminer $\mathbb{P}\big([T_n = n]\big)$.
   2.d. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([T_n = k]\big) = 1$.
   2.e. Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

3. **Loi de X_n.**
   3.a. Donner la loi de X_n.
   3.b. Vérifier que $\mathbb{E}(X_n) = 1 - q^n$.
4. **Loi de Y_n.**
   4.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}\big([Y_n = k]\big)$.
   4.b. Déterminer $\mathbb{P}\big([Y_n = n]\big)$.
   4.c. Écrire une égalité liant T_n, X_n et Y_n puis en déduire $\mathbb{E}(Y_n)$.
5. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

Exercice 11 – ●●○○ - EML 2016 E

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. 4.a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.
   4.b. En utilisant l'imparité de la fonction $t \longmapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. 10.a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.
    10.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([U_n \leqslant x]\big) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 12 – ●●○○ - EML 2014 E

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 4, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. 1.a. Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big)$.
   1.b. Montrer que $\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Déterminer $X_n(\Omega)$.
4. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
5. Calculer $\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big)$.
6. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([X_n = 2]\big) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
7. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$.
8. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
   En déduire que $\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
9. Montrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n > k]\big)$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.
10. Démontrer : $\forall k \in [\![2; n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

Dans cette partie, on s'intéresse à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.
    Démontrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ définit une loi de probabilité. On considère alors une variable aléatoire Z dont la loi est donnée par la suite u.
12. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers Z.
13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 13 – ●●○○ - EDHEC 2021 E

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. 1.a. Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.
   1.b. On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.
2. 2.a. Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.
   2.b. On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   3.a. On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.
   3.b. En déduire que la variable aléatoire M_n est à densité.
   3.c. On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. 5.a. Soit x un réel strictement positif.
   Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.
   5.b. Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.