



# 14

## ANALYSE

### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

#### INTRODUCTION...

Les équations différentielles sont apparues au XVII<sup>ÈME</sup> siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.

Ce n'est qu'à partir du XVIII<sup>ÈME</sup> siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

## POUR BIEN DÉMARRER...

1. Compléter :

Fonction	Une primitive
$x \mapsto 0$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	
$x \mapsto e^{\alpha x} \ (\alpha \neq 0)$	
$\frac{u'}{u^2}$	
$u'e^u$	
$\frac{u'}{u}$	
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	

2. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . Donner une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(x)$ . Peut-on en donner d'autres ?

Dans tout le chapitre,  $I$  désigne un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

# I GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

### DÉFINITIONS 1

### ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE, SOLUTION, TRAJECTOIRE, ÉQUILIBRE

- D1** On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction  $y$  (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.
- D2** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n, b$  des fonctions définies et continues sur  $I$ , telles que  $a_n$  n'est pas la fonction nulle. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre  $n$**  une équation de la forme :
- $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$
- où  $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.
- D3** Par convention, la fonction  $y$  et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.
- D4** Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.
- D5** Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.
- D6** Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

#### Petite remarque

Souvent,  $f$  est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera  $y$  la **fonction inconnue** d'une équation différentielle.

#### Vocabulaire

Les fonctions  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

#### Attention !

Il s'agit d'une égalité de fonctions !

#### Petite remarque

Si l'intervalle  $I$  n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de  $\mathbb{R}$ .

### EXEMPLES 1

- E1** L'équation  $y'' \times y' + 3y^2 = g$ , où  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$ , est une équation différentielle. Une solution  $f$  de cette équation différentielle est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

- E2** Sont des équations différentielles linéaires :

- E3** Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

- E4** L'équation  $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$ , où  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et  $(E_H) : y' - 2xy = 0$  est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$  est solution de  $(E_H)$ .

- Cherchons une solution de  $(E)$  qui soit dans  $\mathbb{R}_1[x]$ . On la notera  $f_p$ .

#### Rigueur !

Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et  $x$  n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

#### En fait...

Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en  $y$ ...

#### Vocabulaire

On a ainsi trouvé une **solution particulière** de  $(E)$ .

## I.2 LA LINÉARITÉ, C'EST LE PIED !

### PROPRIÉTÉS 1

### STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UNE EDL

Soient  $(E)$  une équation différentielle linéaire et  $(E_H)$  son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons  $S_E$  l'ensemble des solutions de  $E$ ,  $S_H$  l'ensemble des solutions de  $(E_H)$ .

**P1**  $S_H$  est un espace vectoriel.

**P2** Toute solution de  $(E)$  est obtenue en ajoutant à une solution particulière de  $(E)$  une solution quelconque de  $(E_H)$ . Autrement dit :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

Ou encore, en notant  $f_p$  une solution particulière de  $E$  :

$$S_E = \{f_p + f_H \mid f_H \in S_H\}$$

#### Important !

Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

\* DÉMONSTRATION : Voir [QCI43](#) pour le cas particulier d'une EDL1 à coefficients constants. La méthode s'adapte dans le cas général. \*

### PROPRIÉTÉ 2

### PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ainsi que  $b_1$  et  $b_2$  des fonctions continues sur  $I$ . On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si  $f_1$  est une solution particulière de  $(E_1)$  et  $f_2$  une solution particulière de  $(E_2)$ , alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

\* DÉMONSTRATION : Soient  $f_1$  une solution particulière de  $(E_1)$  et  $f_2$  une solution particulière de  $(E_2)$ . Soient également  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont des solutions respectives de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , elles sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et donc  $\lambda f_1 + \mu f_2$  également. Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^n a_k f_2^{(k)} && f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

**Conclusion** : la fonction  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution de  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ . \*

### EXEMPLE 2

Une solution particulière de  $y' + y = 1$  est  
 Une solution particulière de  $y' + y = x$  est

**Conclusion** : par principe de superposition, une solution particulière de  $y' + y = 3 + 2x$  est la fonction  $f_p : x \mapsto 2x + 1$ .

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

## II EDL DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

### DÉFINITION 2

### EDL<sub>1</sub> À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient  $a_0$  et  $a_1$  des réels tels que  $a_1 \neq 0$  et  $b$  une fonction définie et continue sur  $I$ .  
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.

Puisque  $a_1 \neq 0$ , on a, pour tout  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  :

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

#### Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL<sub>1</sub> normalisées de la forme :  $y' + ay = b$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b$  une fonction continue sur  $I$ ).

Si l'EDL<sub>1</sub> n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

### II.1 RÉOLUTION D'UNE EDL<sub>1</sub>

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène  $y' + ay = 0$ ,
- trouver une solution particulière de  $y' + ay = b$ ...

### THÉORÈME 1

### RÉSOLUTION DE $y' + ay = 0$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y' + ay = 0$  est  $\{x \in I \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

#### Petite remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de  $y' + ay = 0$ . On en a même une base :  $(x \mapsto e^{-ax})$ .

\* DÉMONSTRATION : Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

⇐ Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que nous considérons ensuite, tel que :  $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$ .

- \* La fonction  $x \mapsto -ax$  est affine donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Par conséquent,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
- \* Pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -a\lambda e^{-ax} + a\lambda e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est solution de  $y' + ay = 0$ .

⇒ Soit  $f$  une solution de  $y' + ay = 0$ . Montrons :  $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$ .

Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x)e^{ax} = \lambda$$

Posons alors la fonction  $g : x \mapsto f(x)e^{ax}$  et montrons qu'elle est constante sur  $I$ .

La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , car elle est solution de  $y' + ay = 0$ , donc la fonction  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , comme produit de telles fonctions et, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + f(x)ae^{ax} \\ &= e^{ax}(f'(x) + af(x)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) f \text{ est solution de } y' + ay = 0$$

Par conséquent, la fonction  $g$  est dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle, cette fonction est donc constante sur  $I$ . Il existe donc un réel  $\lambda$  tel que pour tout  $x \in I, g(x) = \lambda$ . Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$$

**Conclusion :**  $(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$

\*

#### ✓ Rigueur !

Une solution de  $y' + ay = 0$  est une fonction  $f$  qui vérifie :

- $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- $f' + af = 0$ .

#### Question :

Une fonction dérivable et de dérivée nulle sur  $\mathbb{R}^*$  est-elle constante sur  $\mathbb{R}^*$  ?

### EXEMPLES 3

**E1** L'équation  $y' + 2y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est

**E2** On considère l'équation différentielle  $y' - 3y = 6$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**  
L'ensemble des solutions de  $y' - 3y = 0$  est  $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .
- **Solution particulière.**  
On remarque que la fonction  $x \mapsto -2$  est une solution particulière de (E).

**Conclusion :** l'ensemble des solutions l'équation différentielle  $y' - 3y = 6$  est  $\{x \mapsto -2 + \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**E3** Résolvons l'équation différentielle  $y' + y = x + 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

#### Petite remarque

Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher 'sous la même forme' que le second membre.

#### ♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$ :

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si  $b$  est constante, la fonction constante  $x \mapsto \frac{b}{a}$  convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

## II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) :  $y' + ay = b$  admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

### THÉORÈME 2

### DE CAUCHY SUR EDL1

Si  $a$  est un réel et  $b$  une fonction continue sur  $I$ , alors pour tous  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , le problème  $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ , possède une et une seule solution.

#### Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition  $y(x_0) = y_0$  en est la **condition initiale**.

\* DÉMONSTRATION : En exercice.

\*

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais. Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

#### En effet :

Si deux trajectoires ont un point commun, en  $(x_0, y_0)$ , alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

#### ♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante  $\lambda$  dans la forme générale des solutions.

### III EDL DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

#### DÉFINITION 3

#### EDL<sub>2</sub> À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient  $a_0, a_1, a_2$  des réels tels que  $a_2 \neq 0$  et  $b$  une fonction définie et continue sur  $I$ .  
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où  $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.

Puisque  $a_2 \neq 0$ , on a, pour tout  $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

#### Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL<sub>2</sub> normalisées de la forme :  $y'' + ay' + by = c$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c$  une fonction continue sur  $I$ ).

Si l'EDL<sub>2</sub> n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

#### III.1 RÉOLUTION D'UNE EDL<sub>2</sub>

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène  $y'' + ay' + by = 0$ ,
- trouver une solution particulière de  $y'' + ay' + by = c$ ...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

#### DÉFINITION 4

#### ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

L'équation  $r^2 + ar + b = 0$ , d'inconnue  $r \in \mathbb{R}$ , est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ .

#### THÉORÈME 3

#### RÉSOLUTION DE $y'' + ay' + by = 0$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\Delta$  le discriminant associé à l'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$ .

**T1** Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{x \in I \mid \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

**T2** Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  admet une solution  $r_0$  et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{x \in I \mid (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

#### Petite remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$ . On en a même une base :

- si  $\Delta > 0$  :

$$(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$$

- si  $\Delta = 0$  :

$$(x \mapsto x e^{r_0 x}, x \mapsto e^{r_0 x})$$

\* DÉMONSTRATION :

**T1.** Supposons  $\Delta > 0$  et notons  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions distinctes de  $r^2 + ar + b = 0$ .

Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\Leftarrow$  Supposons qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tels que :  $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f''(x) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a(\lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}) + b(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}) \\ &= \lambda e^{r_1 x} (r_1^2 + ar_1 + b) + \mu e^{r_2 x} (r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \lambda e^{r_1 x} (r_1^2 + ar_1 + b) \\ \mu e^{r_2 x} (r_2^2 + ar_2 + b) \end{array} \right\} r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 + ar + b = 0$

Ainsi  $f$  est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ .

⇒ Soit  $f$  une solution de  $y'' + ay' + by = 0$ . Montrons :  $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ .  
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x)e^{-r_1 x} = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Posons alors la fonction  $g : x \mapsto f(x)e^{-r_1 x}$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , car elle est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ , donc la fonction  $g$  est également de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-r_1 x} - r_1 f(x)e^{-r_1 x} \\ &= e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r_1 e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) + e^{-r_1 x} (f''(x) - r_1 f'(x)) \\ &= e^{-r_1 x} (f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \\ &= e^{-r_1 x} (-af'(x) - bf(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0 \\ \curvearrowright r_1 + r_2 = -a \text{ et } r_1 r_2 = b \end{array} \right\} \\ &= e^{-r_1 x} ((-a - 2r_1)f'(x) + (r_1^2 - b)f(x)) \\ &= e^{-r_1 x} ((r_2 - r_1)f'(x) - r_1(r_2 - r_1)f(x)) \\ &= (r_2 - r_1)e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) \\ &= (r_2 - r_1)g'(x) && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{calcul ci-dessus} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

**Rappel...**  
Si  $x^2 - Sx + p = 0$  admet deux solutions (distinctes ou non) notées  $x_1$  et  $x_2$ , alors  $x_1 + x_2 = S$  et  $x_1 x_2 = P$  (car on a alors  $x^2 - Sx + p = (x - x_1)(x - x_2)...$ ).

Par conséquent, la fonction  $g'$  est solution de l'équation  $y' - (r_2 - r_1)y = 0$ , qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in I, g'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$$

Et donc, puisque  $r_2 - r_1 \neq 0$  (car  $r_1 \neq r_2$ ) et que  $I$  est un intervalle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tel que pour tout  $x \in I$  :

$$g(x) = \lambda + \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x}$$

En posant  $\mu = \frac{\alpha}{r_2 - r_1}$ , on obtient :

$$\forall x \in I, g(x) = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

**Important !**  
Le fait que  $I$  soit un intervalle est nécessaire... Si  $h' = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que  $h = C_1$  sur  $] -\infty; 0[$  et  $h = C_2$  sur  $]0; +\infty[$ ...

**Conclusion :** ( $f$  est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ )  $\iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$ .

T2. Supposons  $\Delta = 0$  et notons  $r_0$  l'unique solution de  $r^2 + ar + b = 0$ . Raisonnons par double implication.

⇐ Sans difficulté, en utilisant le fait que  $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ ...

⇒ On raisonne de la même façon que pour T1 ; en posant cette fois  $g : x \mapsto f(x)e^{-r_0 x}$ .

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout  $x \in I$  :

$$g''(x) = 0$$

Puisque  $I$  est un intervalle, il existe donc un réel  $\lambda$  tel que pour tout  $x \in I, g'(x) = \lambda$ . Et donc :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, g(x) = \lambda x + \mu$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$$

**Conclusion :** ( $f$  est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ )  $\iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x})$ .

★

**Petite remarque**  
Les calculs de  $g'(x)$  et de  $g''(x)$  du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitent pas que  $r_1 \neq r_2$ .

#### EXEMPLES 4

**E1** L'équation  $y'' - y' - 6y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est  $r^2 - r - 6 = 0$ . Les solutions de  $r^2 - r - 6 = 0$  sont  $-2$  et  $3$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' - y' - 6y = 0$  est

**E2** L'équation  $y'' + 2y' + y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . L'unique solution de  $r^2 + 2r + 1 = 0$  est  $-1$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' + 2y' + y = 0$  est



**E3** On considère l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

• **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$  est  $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

• **Solution particulière.**

On remarque que la fonction  $x \mapsto 1$  est une solution particulière de  $y'' + 2y' + y = 1$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' + 2y' + y = 1$  est  $\{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

**E4** Résolvons l'équation différentielle  $y'' - 4y = 4x + 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour déterminer une solution particulière de  $y'' + ay' + by = c$  :

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si  $c$  est constante, la fonction constante  $x \mapsto \frac{c}{b}$  (quand  $b \neq 0$ ) convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

### III.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) :  $y'' + ay' + by = c$  admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

**THÉORÈME 4**

DE CAUCHY SUR EDL2

Si  $a$  et  $b$  sont des réels réels et  $c$  une fonction continue sur  $I$ , alors pour tous  $x_0 \in I$  et  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ , le problème

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; y'(x_0) = z_0 \end{cases}, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}), \text{ possède une et une seule solution.}$$

**Vocabulaire**

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = z_0$  en sont les **conditions initiales**.

\* DÉMONSTRATION : Celui-ci, on l'admet!

\*

♣ **MÉTHODE 4** ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  dans la forme générale des solutions.

**EXEMPLE 5**

Résolvons le problème de Cauchy suivant :  $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$  d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .



# IV GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

## IV.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

### DÉFINITIONS 5

### SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, SOLUTION

**D1** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1;n]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$  et  $b_1, \dots, b_n$  des fonctions définies et continues sur  $I$ .  
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille  $n$**  tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

où  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  sont les fonctions inconnues.  
En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

**D2** Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme  $X' = AX$ , où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont les composantes sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  inconnues.

**D3** Une **solution** du système différentiel  $X' = AX + B$  est une application  $Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que :

- ✓ chaque composante est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- ✓  $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + B(t)$ .

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

#### Vocabulaire

Les réels  $a_{i,j}$  sont les **coefficients** du système différentiel.

#### Attention !

Il s'agit d'égalités de fonctions !

#### Pour info...

En fait,  $X'$  n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une *norme* sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### Attention !

$A$  est une matrice carrée de réels,  $X, X'$  et  $B$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , et  $X' = AX + B$  est une égalité de fonctions !

#### Petite remarque

Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...

### EXEMPLE 6

Récrivons l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  sous forme de système différentiel.

Dans toute la suite, on considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### THÉORÈME 5

### DE CAUCHY SUR SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Avec les notations précédentes, pour tout  $t_0 \in I$  et tout  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le problème  $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$  possède une et une seule solution.

#### Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

\* DÉMONSTRATION : Théorème admis.

\*

### EXEMPLE 7

Montrons que si  $Y$  est une solution non nulle de  $X' = AX$  sur  $I$ , alors  $XY$  ne s'annule pas sur  $I$ .

## IV.2 STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 3	STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SDL					
Soient $(E) : X' = AX + B$ un système différentiel linéaire de taille $n$ et $(E_H) : X' = AX$ son système différentiel linéaire homogène associé. Notons $S_E$ l'ensemble des solutions de $E$ , $S_H$ l'ensemble des solutions de $(E_H)$ .						
<b>P1</b>	$S_H$ est un espace vectoriel					
<b>P2</b>	Pour tout $t_0 \in I$ , l'application $f : \begin{cases} S_H & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme.					
<b>P3</b>	Toute solution de $(E)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de $(E)$ une solution quelconque de $(E_H)$ . Autrement dit :					
<table border="1"><tr><td>solution générale du SDL</td><td>=</td><td>solution particulière du SDL</td><td>+</td><td>solution générale du SDL homogène associé</td></tr></table>		solution générale du SDL	=	solution particulière du SDL	+	solution générale du SDL homogène associé
solution générale du SDL	=	solution particulière du SDL	+	solution générale du SDL homogène associé		
Ou encore, en notant $X_p$ une solution particulière de $(E)$ :						
$S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$						

**Conséquence :**  
On obtient :  $\dim(S_H) = n$ .

**Petite remarque**  
Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

\* DÉMONSTRATION :

\*

PROPRIÉTÉ 4

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ainsi que  $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ .  
 Si  $X_1$  est une solution de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  est une solution de  $X' = AX + B_2$ , alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  
 $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est une solution de  $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$ .

\* DÉMONSTRATION :

\*

### IV.3 ÉQUILIBRES ET TRAJECTOIRES

DÉFINITION 6

ÉQUILIBRE D'UN SDL

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

**À retenir...**

La fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système  $X' = AX + B$  possède un équilibre noté  $X_0$ . Dans ce cas :  $\forall t \in I, X'_0(t) = 0$ , et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- $B$  est constante,
- $B \in \text{Im}(A)$ .

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

PROPRIÉTÉ 5

CARACTÉRISATION DES ÉQUILIBRES DES SYSTÈMES HOMOGENES

Soit  $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  
 La fonction  $t \mapsto Y_0$  est un équilibre de  $X' = AX$  si, et seulement si  $Y_0 \in \ker(A)$ .

**À retenir...**

Si  $A$  est inversible, alors la fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

\* DÉMONSTRATION : Notons  $Y : t \mapsto Y_0$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Chaque composante de  $Y$  étant constante, elle est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On a ensuite, puisqu'on sait déjà que  $Y$  est constante :

$$\begin{aligned}
 (Y \text{ est un équilibre de } X' = AX) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = AY(t) \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 = AY(t) && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = 0 \\ \curvearrowright Y \text{ est constante égale à } Y_0 \end{array} \right\} \\
 &\iff AY_0 = 0 \\
 &\iff Y_0 \in \ker(A)
 \end{aligned}$$

\*

♣ MÉTHODE 5 ♣ Pour déterminer les équilibres du système  $X' = AX$  :

- on détermine  $\ker(A)$ ,
- on conclut avec les bons objets : les équilibres sont des applications de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , par des matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**EXEMPLE 8**

Déterminons les équilibres du système différentiel : (E) : 
$$\begin{cases} x' &= x + y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= 2x + y + 2z \end{cases}$$

**DÉFINITION 7****TRAJECTOIRE D'UN SDL**

Une **trajectoire** de  $X' = AX$  est un ensemble  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ , où  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est une solution de  $X' = AX$ .

**Petite remarque**

Une trajectoire associée à un équilibre est réduite à un point de  $\mathbb{R}^n$ .

**PROPRIÉTÉ 6**

Si deux trajectoires de  $X' = AX$  ont un point commun, alors elles sont confondues.  
Autrement dit, deux trajectoires de  $X' = AX$  sont soit distinctes, soit confondues.

**\*** DÉMONSTRATION : Soient  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  et  $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  deux trajectoires associées respectivement aux solutions  $X$  et  $Y$  du système différentiel  $Z' = AZ$ .

Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun; autrement dit, supposons qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$ .

Ainsi, en notant  $Z_0$  ce point commun,  $X$  et  $Y$  sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.

**Conclusion** : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales. \*

**DÉFINITIONS 8****TRAJECTOIRE CONVERGENTE, DIVERGENTE**

Soit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  une solution de  $X' = AX$ .

**D1** La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est **convergente** lorsqu'il existe  $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$ .

♣ **Méthode !**

Pour montrer qu'une trajectoire est divergente, il suffit d'établir qu'une de ses composantes tend vers  $\pm\infty$ ...

On dit alors que la trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  converge vers  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ .

**D2** La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

**EXEMPLE 9**

Voyons comment résoudre le système différentiel 
$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases} .$$

- Justifions que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.
- Déterminons les valeurs propres de  $A$  ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . Montrons que l'application  $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$  est solution de  $X' = AX$ .

- Dédisons-en l'ensemble des solutions de  $X' = AX$ .

- Donnons finalement une trajectoire convergente et une trajectoire divergente de  $X' = AX$ .



# V CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE

L'objectif est de résoudre le système différentiel  $X' = AX$  dans le cas où  $A$  est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

## LEMME 1

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .  
La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t} V$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

\* DÉMONSTRATION : Notons  $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$ . Puisque  $V$  est constant, chaque composante de  $Y$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} AV && \left. \begin{array}{l} \text{)} \\ \text{)} \end{array} \right\} V \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda \\ &= A \times (e^{\lambda t} V) \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t} V$  est donc solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ . \*

### Important !

- Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de  $X' = AX$ . Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
- Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

### Petite remarque

On peut s'imaginer la tête de  $Y$  sinon, pour se rendre compte de l'expression de  $Y'(t)$ ...

## THÉORÈME 6

### RÉSOLUTION DE $X' = AX$ , CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE (HP)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

On a ainsi :

$$(X \text{ est solution de } X' = AX) \iff (\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est  $\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$ .

### Important !

Puisque  $A$  est diagonalisable, il existe bien une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

\* DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons  $S$  l'ensemble des solutions du système différentiel  $X' = AX$ .

1. On sait déjà que  $S$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . Notons, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ .

- D'après le lemme précédent, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i$  est solution de  $X' = AX$ .
- Montrons que la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille libre de  $S$ .  
Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Supposons  $a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n = 0$ . Autrement dit, supposons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 Y_1(t) + \dots + a_n Y_n(t) = 0_{n,1}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} V_n = 0_{n,1}$$

En particulier, pour  $t = 0$ , on obtient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0_{n,1}$$

Or, la famille  $(V_1, \dots, V_n)$  est libre (car c'est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ). D'où :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Et ainsi, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est libre.

Par conséquent, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille de  $S$  qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal  $n$ , égal à  $\dim(S)$ .

**Conclusion :** la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de  $S$  et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \{t \mapsto c_1 Y_1(t) + \dots + c_n Y_n(t), (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

### Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ...).

2. Posons  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $V_1, \dots, V_n$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  
Puisque  $A$  est diagonalisable,  $P$  est inversible et :

$$A = PDP^{-1}$$

Soit  $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ . Posons  $Z = P^{-1}X$  et notons  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ . Puisque chaque composante de  $X$  est  $\mathcal{C}^1$

**X Attention !**  
 $z_1, \dots, z_n$  sont des fonctions !

et que  $P^{-1}$  est constante, chaque composante de  $Z$  est  $\mathcal{C}^1$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Ainsi :

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X$$

$$\iff PZ' = PDZ$$

$$\iff Z' = DZ$$

$$\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, z'_i = \lambda_i z_i$$

$$\iff \exists c_i \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, z_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

$$\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n$$

$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow Z = P^{-1}X \text{ et } X' = PZ' \\ \hookrightarrow P \text{ est inversible} \\ \hookrightarrow D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array} \right\}$

$\left. \right\} P = (V_1 \dots V_n)$

**Tiens tiens tiens...**  
Il est inutile de calculer  $P^{-1}$  pour résoudre le système différentiel par cette méthode.

\* |

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

**EXEMPLE 10**

Réolvons le système différentiel  $(E) : \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$  d'inconnues  $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Et si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ? Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les  $z_i$  aura un second membre non constant... Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand  $t \rightarrow +\infty$  :

**THÉORÈME 7** COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES, CAS OÙ  $A$  EST DIAGONALISABLE

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

- T1** Si  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive, alors  $X' = AX$  possède des trajectoires divergentes.
- T2** Si les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).
- T3** Si les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers  $(0, \dots, 0)$ , seul équilibre du système différentiel.

**Confusion d'objets !**

Une trajectoire est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et un équilibre est un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ou plus précisément une application constante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , assimilée à un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ...). On comprend bien l'idée tout de même !

\* DÉMONSTRATION : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  (licite, car  $A$  est diagonalisable) telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,
- pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_k$  la  $k$ -ième composante de  $X$  (où  $X$  est une solution de  $X' = AX$ ) et, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $v_{i,k}$  la  $k$ -ième composante de  $V_i$ .

T1. Supposons que  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que  $\lambda_1 > 0$ .

D'après le lemme 1, la fonction  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

Or :

- $\lambda_1 > 0$ , donc par produit et composition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- $V_1$  est vecteur propre de  $A$ , donc  $V_1$  est non nul. Il existe donc  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , que nous considérons ensuite, tel que la  $k$ -ième composante de  $V_1$  soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est divergente.

T2. Supposons que les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lambda_i < 0$$

Soit  $X$  une solution de  $X' = AX$ . D'après le théorème 6, il existe des réels  $c_1, \dots, c_n$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout  $i \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_i < 0$ . D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ . D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

**Petite remarque**

Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant  $p = n$  et  $p = 0$  respectivement). Dans le cas où  $p = 0$ , chaque somme  $\sum_{i=1}^p (\dots)$  sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^p c_i V_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $\sum_{i=1}^p c_i V_i$ .

Notons  $V = \sum_{i=1}^p c_i V_i$  et montrons que  $V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

On sait que, pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.

Donc :  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i \in \ker(A)$ . Mais  $\ker(A)$  est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 5, on en déduit que la fonction  $t \mapsto V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

**Conclusion** : toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre.

T3. Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où  $p = 0$ ...

On obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $(0, \dots, 0)$ .

Bien évidemment,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de  $X' = AX$ . Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de  $A$ . Ainsi,  $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$ . Et donc, d'après la propriété 5,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

★