14

Analyse

Équations différentielles et systèmes différentiels

Introduction...

Les équations différentielles sont apparues au XVIIème siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.
Ce n'est qu'à partir du XVIIIème siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

Pour bien démarrer...

1. Compléter :

Fonction	Une primitive
$x \longmapsto 0$	$x \longmapsto 43$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\left(\lvert u\rvert\right)$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Donner une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = af(x)$. Peut-on en donner d'autres ?
   - La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ convient...
   - Les fonctions $x \longmapsto 2\mathrm{e}^{ax}$, $x \longmapsto -\mathrm{e}^{ax}$ et, plus généralement, $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$ conviennent également.

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les équations différentielles

I.1 Premières définitions

Définitions 1 — Équation différentielle, solution, trajectoire, équilibre

D1 On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ des fonctions définies et continues sur I, telles que a_n n'est pas la fonction nulle.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3 Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4 Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6 Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

> **Petite remarque** — Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y **la fonction inconnue** d'une équation différentielle.

> **Vocabulaire** — Les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

> **✗ Attention !** — Il s'agit d'une égalité de fonctions !

> **Petite remarque** — Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de $\mathbb{R}$.

Exemples 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = \mathrm{e}^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = \mathrm{e}^x + x^2 - 1$$

> **✓ Rigueur !** — Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc… sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes…

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

$$y' + 2y = 2x^2 \ ;\ y'' - 3y' + 2y = 0 \ ;\ y''' - 3y' + y = \mathrm{e}^x + 1 \ ;\ y' + 2xy = 0$$

> **En fait…** — Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y…

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

$$y' + y^2 = 0 \ ;\ \frac{y'}{y} = x \ ;\ y'y = \mathrm{e}^x$$

E4 L'équation $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(E_H) : y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{x^2}$ est solution de (E_H).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La fonction f_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) - 2xf_\lambda(x) &= 2x\lambda \mathrm{e}^{x^2} - 2x\lambda \mathrm{e}^{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Conclusion : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{x^2}$ est solution de (E_H).

- Cherchons une solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$. On la notera f_p.
  Soit $f \in \mathbb{R}_1[x]$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
  On a :

$$\begin{aligned} (f \text{ est solution de } (E)) &\iff f' - 2xf = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2xf(x) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a - 2x(ax + b) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2ax^2 - 2bx + a = -1 \end{aligned}$$

> **Vocabulaire** — On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E).

$$\iff \begin{cases} -2a & = 2 \\ \quad - 2b & = 0 \\ a & = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = \ \ 0 \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$ est la fonction $f_p : x \longmapsto -x$.

I.2 La linéarité, c'est le pied !

Propriétés 1 — Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

P1 S_H est un espace vectoriel.

P2 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H\}$$

Important ! Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

⋆ Démonstration : Voir QCI43 pour le cas particulier d'une EDL1 à coefficients constants. La méthode s'adapte dans le cas général. ⋆

Propriété 2 — Principe de superposition

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2), alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

⋆ Démonstration : Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2). Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2), elles sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et donc $\lambda f_1 + \mu f_2$ également.
Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}\right) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} a_k f_2^{(k)} && f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. ⋆

Exemple 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$ est la fonction $f_1 : x \longmapsto 1$.
Une solution particulière de $y' + y = x$ est la fonction $f_1 : x \longmapsto x - 1$.

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est la fonction $f_p : x \longmapsto 2x + 1$.

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL du premier ordre à coefficients constants

Définition 2 — EDL1 à coefficients constants

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).
Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

II.1 Résolution d'une EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	$=$	solution particulière de l'EDL	$+$	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$,
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

Théorème 1 — Résolution de $y' + ay = 0$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\big(f \text{ est solution de } y' + ay = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda e^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Petite remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $\left(x \longmapsto e^{-ax}\right)$.

⋆ Démonstration : Il s'agit de dé montrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$.

- ⋆ La fonction $x \longmapsto -ax$ est affine donc $\mathscr{C}^1$ sur I. Par conséquent, f est $\mathscr{C}^1$ sur I.
- ⋆ Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -a\lambda e^{-ax} + a\lambda e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $y' + ay = 0$.

✓ Rigueur !
Une solution de $y' + ay = 0$ est une fonction f qui vérifie :
- f est $\mathscr{C}^1$ sur I,
- $f' + af = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit f une solution de $y' + ay = 0$. Montrons : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$.
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) e^{ax} = \lambda$$

Posons alors la fonction $g : x \longmapsto f(x) e^{ax}$ et montrons qu'elle est constante sur I.
La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur I, car elle est solution de $y' + ay = 0$, donc la fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur I, comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) e^{ax} + f(x) a e^{ax} \\ &= e^{ax}\big(f'(x) + af(x)\big) \\ &= 0 \qquad f \text{ est solution de } y' + ay = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction g est dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle, cette fonction est donc constante sur I. Il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) = \lambda$. Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$$

Question :
Une fonction dérivable et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$?

Conclusion : $\big(f \text{ est solution de } y' + ay = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}\big)$ ⋆

Exemples 3

E1 L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

E2 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\left\{x \longmapsto -2 + \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Petite remarque
Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher "sous la même forme" que le second membre.

E3 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de $y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto x$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' + y = x + 1$ est $\left\{x \longmapsto x + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{b}{a}$ convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 Problème de Cauchy sur EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation $(E) : y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 2 — **de Cauchy sur EDL1**

Si a est un réel et b une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\left\{\begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

⋆ Démonstration : En exercice. ⋆

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques.
Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais.
Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

En effet :
Si deux trajectoires ont un point commun, en (x_0, y_0), alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

III EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3 — EDL2 à coefficients constants

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).
Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

III.1 Résolution d'une EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	$=$	solution particulière de l'EDL	$+$	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$,
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

Définition 4 — Équation caractéristique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3 — Résolution de $y'' + ay' + by = 0$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

T1 Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

T2 Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = (\lambda x + \mu) \mathrm{e}^{r_0 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto (\lambda x + \mu) \mathrm{e}^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Petite remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :
- si $\Delta > 0$:

$$\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}\right)$$

- si $\Delta = 0$:

$$\left(x \longmapsto x\mathrm{e}^{r_0 x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{r_0 x}\right)$$

$\star$ Démonstration :

T1. Supposons $\Delta > 0$ et notons r_1 et r_2 les deux solutions distinctes de $r^2 + ar + b = 0$.
Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(a) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu r_2^2 \mathrm{e}^{r_2 x} + a\big(\lambda r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu r_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\big) + b\big(\lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}\big) \\ &= \lambda \mathrm{e}^{r_1 x}(r_1^2 + ar_1 + b) + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}(r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

r_1 et r_2 sont solutions de $r^2 + ar + b = 0$

Ainsi f est solution de $y'' + ay' + by = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit f une solution de $y''+ay'+by=0$. Montrons : $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$.
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x} \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)e^{-r_1x}=\lambda+\mu e^{(r_2-r_1)x}$$

Posons alors la fonction $g : x\longmapsto f(x)e^{-r_1x}$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, car elle est solution de $y''+ay'+by=0$, donc la fonction g est également de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-r_1x}-r_1f(x)e^{-r_1x}\\ &= e^{-r_1x}\big(f'(x)-r_1f(x)\big)\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r_1e^{-r_1x}\big(f'(x)-r_1f(x)\big)+e^{-r_1x}\big(f''(x)-r_1f'(x)\big)\\ &= e^{-r_1x}\big(f''(x)-2r_1f'(x)+r_1^2f(x)\big)\\ &= e^{-r_1x}\big(-af'(x)-bf(x)-2r_1f'(x)+r_1^2f(x)\big) && \text{f est solution de } y''+ay'+by=0\\ &= e^{-r_1x}\big((-a-2r_1)f'(x)+(r_1^2-b)f(x)\big)\\ &= e^{-r_1x}\big((r_2-r_1)f'(x)-r_1(r_2-r_1)f(x)\big) && r_1+r_2=-a \text{ et } r_1r_2=b\\ &= (r_2-r_1)e^{-r_1x}\big(f'(x)-r_1f(x)\big)\\ &= (r_2-r_1)g'(x) && \text{calcul ci-dessus}\end{aligned}$$

☞ Rappel...
Si $x^2-Sx+p=0$ admet deux solutions (distinctes ou non) notées x_1 et x_2, alors $x_1+x_2=S$ et $x_1x_2=P$ (car on a alors $x^2-Sx+p=(x-x_1)(x-x_2)$...).

Par conséquent, la fonction g' est solution de l'équation $y'-(r_2-r_1)y=0$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x\in I,\ g'(x)=\alpha e^{(r_2-r_1)x}$$

Et donc, puisque $r_2-r_1\neq 0$ (car $r_1\neq r_2$) et que I est un intervalle, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $x\in I$:

$$g(x)=\lambda+\frac{\alpha}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x}$$

Important !
Le fait que I soit un intervalle est nécessaire... Si $h'=0$ sur $\mathfrak{R}$, alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $h=C_1$ sur $]-\infty;0[$ et $h=C_2$ sur $]0;+\infty[$...

En posant $\mu=\dfrac{\alpha}{r_2-r_1}$, on obtient :

$$\forall x\in I,\ g(x)=\lambda+\mu e^{(r_2-r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x\in I,\ f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$$

Conclusion : $\big(f$ est solution de $y''+ay'+by=0\big) \iff \big(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}\big)$.

T2. Supposons $\Delta=0$ et notons r_0 l'unique solution de $r^2+ar+b=0$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sans difficulté, en utilisant le fait que $r_0^2+ar_0=b=0$...

$\boxed{\Longrightarrow}$ On raisonne de la même façon que pour T1 ; en posant cette fois $g : x\longmapsto f(x)e^{-r_0x}$.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout $x\in I$:

$$g''(x)=0$$

Petite remarque
Les calculs de $g'(x)$ et de $g''(x)$ du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitaient pas que $r_1\neq r_2$.

Puisque I est un intervalle, il existe donc un réel λ tel que pour tout $x\in I$, $g'(x)=\lambda$. Et donc :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ g(x)=\lambda x+\mu$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)=(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$$

Conclusion : $\big(f$ est solution de $y''+ay'+by=0\big) \iff \big(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \ / \ \forall x\in I,\ f(x)=(\lambda x+\mu)e^{r_0x}\big)$.

⋆

EXEMPLES 4

E1 L'équation $y''-y'-6y=0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2-r-6=0$. Les solutions de $r^2-r-6=0$ sont -2 et 3.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''-y'-6y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda e^{-2x}+\mu e^{3x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

E2 L'équation $y''+2y'+y=0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$. L'unique solution de $r^2+2r+1=0$ est -1.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''+2y'+y=0$ est $\{x\longmapsto\lambda(\lambda x+\mu)e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

E3 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ est $\left\{x \longmapsto 1 + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

E4 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2x} + \mu\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- **Solution particulière.**
  Remarquons que :
  - ⋆ la fonction $x \longmapsto 1$ est solution particulière de $y'' - 4y = 1$.
  - ⋆ la fonction $x \longmapsto -x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x$.

  Par principe de superposition, la fonction $x \longmapsto 1 - x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x + 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - 4y = 4x + 1$ est $\left\{x \longmapsto 1 - x + \lambda\mathrm{e}^{2x} + \mu\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

♣ Méthode 3 ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 Problème de Cauchy sur EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions...
En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 4 — de Cauchy sur EDL2

Si a et b sont des réels réel et c une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \ ;\ \ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

⋆ Démonstration : Celui-ci, on l'admet ! ⋆

♣ Méthode 4 ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

Exemple 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$.**
  Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
  - ⋆ **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
    L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{x} + \mu\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
  - ⋆ **Solution particulière.**
    Remarquons que la fonction $x \longmapsto x$ est solution particulière de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$.

  Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$ est $\left\{x \longmapsto x + \lambda\mathrm{e}^{x} + \mu\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- Le problème donné est un problème de Cauchy, qui admet donc une unique solution, notée f.

D'après ce qui précède, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$$

Or $f(0) = f'(0) = 0$, d'où :

$$\lambda + \mu = 0 \ \ ; \ \ 1 + \lambda - 2\mu = 0$$

Mais :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \ \ 0 \\ \lambda - 2\mu = -1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda + \mu = \ \ 0 \\ -3\mu = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1}{3} \\ \mu = \ \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $f : x \longmapsto x - \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

Petite remarque

Ne pas hésiter à commencer par calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ avant de donner $f'(0)$...

IV Généralités sur les systèmes différentiels

IV.1 Premières définitions

Définitions 5 — **Systèmes différentiels, solution**

D1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $b_1, \dots, b_n$ des fonctions définies et continues sur I.
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille n** tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont les fonctions inconnues.
En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

D2 Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes sont des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I inconnues.

D3 Une **solution** du système différentiel $X' = AX + B$ est une application $Y : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

- ✓ chaque composante est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,
- ✓ $\forall t \in I,\ Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

Vocabulaire — Les réels $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système différentiel.

✘ Attention ! — Il s'agit d'égalités de fonctions !

☞ Pour info... — En fait, X' n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une *norme* sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions $X : I \to \mathbb{R}^n$.

✘ Attention ! — A est une matrice carrée de réels, X, X' et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $X' = AX + B$ est une égalité de fonctions !

Petite remarque — Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...

Exemple 6

Réécrivons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sous forme de système différentiel.

Posons $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y' \\ -ay' - by \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \\ &= AX \qquad \text{en notant } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$y'' + ay' + by = 0 \iff X' = AX$$

Dans toute la suite, on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 5 — **de Cauchy sur système différentiel**

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le problème $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ d'inconnue $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède une et une seule solution.

Vocabulaire — Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

⋆ Démonstration : Théorème admis. ⋆

Exemple 7

Montrons que si Y est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I, alors XY ne s'annule pas sur I.
Supposons que Y est une solution non nulle de $X' = AX$. Raisonnons par l'absurde et supposons que Y s'annule en un réel $t_0 \in I$.

Par conséquent, Y vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = 0_{n,1} \end{cases}$$

Mais, l'application $t \longmapsto 0_{n,1}$ vérifie également ce problème de Cauchy.
Par théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait qu'un tel problème admet une unique solution. Par conséquent, Y est nulle : contradiction !

Conclusion : si Y est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I, alors Y ne s'annule pas sur I.

IV.2 Structure de l'ensemble des solutions

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

Propriétés 3 — **Structure de l'ensemble des solutions d'un SDL**

Soient $(E)\ :\ X' = AX + B$ un système différentiel linéaire de taille n et $(E_H)\ :\ X' = AX$ son système différentiel linéaire homogène associé. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

P1 S_H est un espace vectoriel

P2 Pour tout $t_0 \in I$, l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} S_H & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X(t_0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

P3 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale du SDL	=	solution particulière du SDL	+	solution générale du SDL homogène associé

Ou encore, en notant X_p une solution particulière de (E) :

$$S_E = \left\{ X_p + X_H \ / \ X_H \in S_H \right\}$$

Conséquence : On obtient : $\dim(S_H) = n$.

Petite remarque Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

⋆ Démonstration :

P1.
- ✓ $S_H \subset \mathscr{C}^1\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, qui est un espace vectoriel...
- ✓ S_H est non vide, car l'application $t \longmapsto 0_{n,1}$ est solution de $X' = AX$.
- ✓ Soient $X, Y \in S_H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda X + \mu Y \in S_H$.
  - ⋆ Puisque X et Y sont solution du système différentiel (E), les composantes de X et Y sont des applications $\mathscr{C}^1$ sur I. Par conséquent, les composantes de $\lambda X + \mu Y$ également.
  - ⋆ Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}(\lambda X + \mu Y)' &= \lambda X' + \mu Y' \\ &= \lambda AX + \mu AY && X, Y \in S_H \\ &= A(\lambda X + \mu Y)\end{aligned}$$

  Ainsi $\lambda X + \mu Y \in S_H$.

Conclusion : S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$, donc c'est un espace vectoriel.

P2. Soit $t_0 \in I$.
- **Linéarité.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in S_H$.
  On a :

$$\begin{aligned}f(\lambda X + \mu Y) &= (\lambda X + \mu Y)(t_0) \\ &= \lambda X(t_0) + \mu Y(t_0) && \text{linéarité de l'évaluation en } t_0 \text{ pour chacune des composantes...} \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y)\end{aligned}$$

  Conclusion : f est une application linéaire.
- **Bijectivité.** Montrons :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! X \in S_H \ / \ f(X) = X_0$$

  Cela équivaut à établir :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! X \in \mathscr{C}^1\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) \ / \ \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

  Ce résultat est vrai, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
  Conclusion : f est bijective.

Conclusion : f est un isomorphisme. En particulier : $\dim(S_H) = \dim\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) = n$.

P3. Soit X_p une solution particulière de (E). Soit $X \in \mathscr{C}^1\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$. On a :

$$\begin{aligned} X \in S_E &\iff X' = AX + B \\ &\iff X' - X_p' = AX + B - AX_p + B) && X_p' = AX_p + B \text{, car } X_p \text{ est solution de } (E) \\ &\iff (X - X_p)' = A(X - X_p) && \text{linéarité de la dérivation} \\ &\iff X - X_p \in S_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \;/\; X - X_p = X_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \;/\; X = X_p + X_H \end{aligned}$$

Conclusion : $S_E = \big\{X_p + X_H \;/\; X_H \in S_H\big\}$.

$\star$

Propriété 4 — **Principe de superposition**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $B_1, B_2 \in \mathscr{C}\big(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)$.
Si X_1 est une solution de $X' = AX + B_1$ et X_2 est une solution de $X' = AX + B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

$\star$ **Démonstration :** Soient X_1 une solution particulière de $X' = AX+B_1$ et X_2 une solution particulière de $X' = AX+B_2$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque X_1 et X_2 sont solutions respectives de $X' = AX + B_1$ et $X' = AX + B_2$, leurs composantes sont des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et donc celles de $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ également. Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \\ &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_2 B_2 && X_1 \text{ est solution de } X' = AX + B_1 \text{ et } X_2 \text{ de } X' = AX + B_2 \\ &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

$\star$

IV.3 Équilibres et trajectoires

Définition 6 — **Équilibre d'un SDL**

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

> **À retenir…**
> La fonction $t \longmapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système $X' = AX + B$ possède un équilibre noté X_0. Dans ce cas : $\forall t \in I,\ X_0'(t) = 0$, et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- B est constante,
- $B \in \mathrm{Im}(A)$.

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

Propriété 5 — **Caractérisation des équilibres des systèmes homogènes**

Soit $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La fonction $t \longmapsto Y_0$ est un équilibre de $X' = AX$ si, et seulement si $Y_0 \in \ker(A)$.

> **À retenir…**
> Si A est inversible, alors la fonction $t \longmapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

$\star$ **Démonstration :** Notons $Y : t \longmapsto Y_0$ définie sur $\mathbb{R}$. Chaque composante de Y étant constante, elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a ensuite, puisqu'on sait déjà que Y est constante :

$$\begin{aligned} \big(Y \text{ est un équilibre de } X' = AX\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = AY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 0 = AY(t) && Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = 0 \\ &\iff AY_0 = 0 && Y \text{ est constante égale à } Y_0 \\ &\iff Y_0 \in \ker(A) \end{aligned}$$

$\star$

♣ **Méthode 5** ♣ **Pour déterminer les équilibres du système $X' = AX$:**

- on déterminer $\ker(A)$,
- on conclut avec les bons objets : **les équilibres sont des applications de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, par des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 8

Déterminons les équilibres du système différentiel : (E) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & + & z \\ y' & = & x & & & + & z \\ z' & = & 2x & + & y & + & 2z \end{array}\right.$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) & \iff \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{array}\right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right. \\ & \iff \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{array}\right. \\ & \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des équilibres de (E) est $\left\{ t \longmapsto \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Définition 7 — Trajectoire d'un SDL

Une **trajectoire** de $X' = AX$ est un ensemble $\left\{ \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right), \ t \in \mathbb{R} \right\}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de $X' = AX$.

Petite remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduit à un point de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 6

Si deux trajectoires de $X' = AX$ ont un point commun, alors elles sont confondues.
Autrement dit, deux trajectoires de $X' = AX$ sont soit distinctes, soit confondues.

Démonstration : Soient $\left\{ \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right), \ t \in \mathbb{R} \right\}$ et $\left\{ \left(y_1(t), \dots, y_n(t)\right), \ t \in \mathbb{R} \right\}$ deux trajectoires associées respectivement aux solutions X et Y du système différentiel $Z' = AZ$.
Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun ; autrement dit, supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\left(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\right) = \left(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)\right)$.
Ainsi, en notant Z_0 ce point commun, X et Y sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{array}\right.$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.
Conclusion : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales.

Définitions 8 — Trajectoire convergente, divergente

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de $X' = AX$.

D1 La trajectoire $\left\{ \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right) \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$ est **convergente** lorsqu'il existe $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall i \in [\![1; n]\!], \ \lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$.

On dit alors que la trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.

D2 La trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

> **♣ Méthode !**
> Pour montrer qu'une trajectoire est divergente, il suffit d'établir qu'une de ses composantes tend vers $\pm\infty$...

EXEMPLE 9

Voyons comment résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & 2x & + & y & + & z \\ y' & = & x & + & 2y & + & z \\ z' & = & x & + & y & + & 2z \end{array}\right.$.

- Justifions que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

  La matrice A est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable.

- Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.
  Notons, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ.

> **☞ Rappel...**
> $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$.

  ⋆ Remarquons que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que 2 est valeur propre de A et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

  Par conséquent :
$$\dim\left(E_2(A)\right) \geqslant 1$$
  Mais :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 2I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} && C_1 \text{ et } C_2 \text{ ne sont pas colinéaires} \\ &\geqslant 2 \end{aligned}$$
  Et donc, par théorème du rang :
$$\dim\left(E_2(A)\right) \leqslant 1$$
  On en déduit :
$$\dim\left(E_2(A)\right) = 1$$
  Et ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_2(A)$ qui est :

  ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
  ✓ de cardinal 1, égal à $\dim\left(E_2(A)\right)$.

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$.

  ⋆ Ensuite :
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A + I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && C_1 = C_2 \text{ et } C_1 = C_3 \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \\ &= 1 \end{aligned}$$
  Par conséquent, -1 est valeur propre de A et, par théorème du rang :
$$\dim\left(E_{-1}(A)\right) = 2$$
  Puis, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$.

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Remarquer l'égalité $C_1 + 0C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $A - I_3$...
> En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :
> $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3$,
> donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

> **Pourquoi ?**
> Voir l'astuce ci-dessus...

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de $E_{-1}(A)$ qui est :

  ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
  ✓ de cardinal 2, égal à $\dim\left(E_{-1}(A)\right)$.

  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

- Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ. Montrons que l'application $Y : t \longmapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.
Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} v_1 \\ e^{\lambda t} v_2 \\ e^{\lambda t} v_3 \end{pmatrix}$$

Les composantes de Y sont toutes des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} v_1 \\ \lambda e^{\lambda t} v_2 \\ \lambda e^{\lambda t} v_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} AV \quad \text{V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ} \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

Conclusion : l'application $Y : t \longmapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.

- Déduisons-en l'ensemble des solutions de $X' = AX$.
Notons S l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.
On sait que S est un espace vectoriel de dimension 3 (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
Notons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi que $Y_1 : t \longmapsto e^{2t} V_1$, $Y_2 : t \longmapsto e^{-t} V_2$ et $Y_3 : t \longmapsto e^{-t} V_3$.
  - ⋆ D'après le point précédent, on sait que les applications Y_1, Y_2, Y_3 sont solutions de $X' = AX$.
  - ⋆ Montrons que la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre de S.
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aY_1 + bY_2 + cY_3 = 0$.
  Autrement dit, supposons : $\forall t \in \mathbb{R},\ aY_1(t) + bY_2(t) + cY_3(t) = 0_{3,1}$. En prenant $t = 0$, on obtient :

  $$aV_1 + bV_2 + cV_3 = 0_{3,1}$$

  Or la famille (V_1, V_2, V_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car c'est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes.
  D'où :

  $$a = b = c = 0$$

  Et ainsi, la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est libre.

✘ Attention !
Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$...).

Par conséquent, la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille de S qui est :
✓ libre d'après ce qui précède,
✓ de cardinal 3 égal à $\dim(S)$.

Conclusion : la famille (Y_1, Y_2, Y_3) est une base de S et donc :

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &= \left\{ t \longmapsto aY_1(t) + bY_2(t) + cY_3(t),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ t \longmapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

- Donnons finalement une trajectoire convergente et une trajectoire divergente de $X' = AX$.
  - ⋆ Posons $Z_1 : t \longmapsto e^{2t} V_1 + e^{-t} V_2 + e^{-t} V_3$.
  D'après ce qui précède, Z_1 est solution de $X' = AX$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$Z_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

  Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{2t} = +\infty$, la trajectoire associée à Z_1 est divergente.

Petite remarque
Il y en a une infinité qui conviennent : toutes les solutions de la forme $t \longmapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3$ avec $a \neq 0$ sont associées à des trajectoires divergentes.

  - ⋆ Posons $Z_2 : t \longmapsto e^{-t} V_1$.
  D'après ce qui précède, Z_2 est solution de $X' = AX$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$Z_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} -e^{-t} = 0$, la trajectoire associée à Z_2 est convergente (elle converge vers $(0, 0, 0)$.).

Petite remarque
Il y en a une infinité qui conviennent : toutes les solutions de la forme $t \longmapsto ae^{2t} V_1 + be^{-t} V_2 + ce^{-t} V_3$ avec $a = 0$ sont associées à des trajectoires convergentes.

V Cas où A est diagonalisable

L'objectif est de résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

Important !
• Dans le cas où A est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de $X' = AX$. Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
• Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

Lemme 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ.
La fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}V$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Notons $Y : t \longmapsto e^{\lambda t}V$. Puisque V est constant, chaque composante de Y est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t}V \\ &= e^{\lambda t}\lambda V \\ &= e^{\lambda t}AV && \text{V est vecteur propre de A associé à λ} \\ &= A \times \left(e^{\lambda t}V\right) \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}V$ est donc solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Petite remarque
On peut s'imaginer la tête de Y sinon, pour se rendre compte de l'expression de $Y'(t)$...

Théorème 6 — **Résolution de $X' = AX$, cas où A est diagonalisable (HP)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.
Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

On a ainsi :

$$\left(X \text{ est solution de } X' = AX\right) \iff \left(\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}V_i\right)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $X' = AX$ est $\left\{t \longmapsto c_1e^{\lambda_1 t}V_1 + \dots + c_ne^{\lambda_n t}V_n,\ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Important !
Puisque A est diagonalisable, il existe bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Démonstration : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons S l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.

1. On sait déjà que S est un espace vectoriel de dimension n. Notons, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i : t \longmapsto e^{\lambda_i t}V_i$.
   - D'après le lemme précédent, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, Y_i est solution de $X' = AX$.
   - Montrons que la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille libre de S.
     Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Supposons $a_1Y_1 + \dots + a_nY_n = 0$. Autrement dit, supposons :
     $$\forall t \in \mathbb{R},\ a_1Y_(t) + \dots + a_nY_n(t) = 0_{n,1}$$
     On a donc :
     $$\forall t \in \mathbb{R},\ a_1e^{\lambda_1 t}V_1 + \dots + a_ne^{\lambda_n t}V_n = 0_{n,1}$$
     En particulier, pour $t = 0$, on obtient :
     $$a_1V_1 + \dots + a_nV_n = 0_{n,1}$$
     Or, la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est libre (car c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). D'où :
     $$a_1 = \dots = a_n = 0$$
     Et ainsi, la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre.

   Par conséquent, la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille de S qui est :
   ✓ libre d'après ce qui précède,
   ✓ de cardinal n, égal à $\dim(S)$.

   Conclusion : la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base de S et donc :

   $$\begin{aligned} S &= \mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \left\{t \longmapsto c_1Y_1(t) + \dots + c_nY_n(t),\ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{t \longmapsto c_1e^{\lambda_1 t}V_1 + \dots + c_ne^{\lambda_n t}V_n,\ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \end{aligned}$$

✘ Attention !
Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...).

2. Posons P la matrice dont les colonnes sont $V_1, \ldots, V_n$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Puisque A est diagonalisable, P est inversible et :

$$A = PDP^{-1}$$

Soit $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Posons $Z = P^{-1}X$ et notons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Puisque chaque composante de X est $\mathscr{C}^1$ et que P^{-1} est constante, chaque composante de Z est $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

✘ Attention !
$z_1, \ldots, z_n$ sont des fonctions !

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\
&\iff PZ' = PDZ && Z = P^{-1}X \text{ et } X' = PZ' \\
&\iff Z' = DZ && P \text{ est inversible} \\
&\iff \forall i \in [\![1; n]\!],\ z_i' = \lambda_i z_i && D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\
&\iff \exists c_i \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ z_i(t) = c_i e^{\lambda_i t} \\
&\iff \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} && P = (V_1 \cdots V_n) \\
&\iff \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} V_n
\end{aligned}$$

Tiens tiens tiens...
Il est inutile de calculer P^{-1} pour résoudre le système différentiel par cette méthode.

⋆

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

Exemple 10

Résolvons le système différentiel (E) : $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 2x & - & y \\ y' & = & 3x & + & 6y \end{array} \right.$ d'inconnues $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Important !
Il est tout à fait possible, à l'écrit comme à l'oral, que la résolution d'un système différentiel ne soit pas guidée...
• A l'écrit, on guiderait en revanche la réduction de la matrice A, pour orienter vers cette méthode.
• A l'oral, le jury peut attendre une prise d'initiative complète.

Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- Sans difficulté, on trouve que la matrice A est diagonalisable et, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et :

$$A = PDP^{-1}$$

- Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ainsi que $Z = P^{-1}X$.
Puisque x et y sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que P^{-1} est constante, les composantes de Z sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Z'(t) = P^{-1}X'(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & 2x & - & y \\ y' & = & 3x & + & 6y \end{array} \right. &\iff X' = AX \\
&\iff X' = PDP^{-1}X \\
&\iff PZ' = PDZ && Z = P^{-1}X \text{ et } X' = PZ' \\
&\iff Z' = DZ && P \text{ est inversible} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & 3z_1 \\ z_2' & = & 5z_2 \end{array} \right. && \text{en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = c_1 e^{3t} \\ z_2(t) = c_2 e^{5t} \end{array} \right. \\
&\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ y(t) = -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ t \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix}, \ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Et si la matrice A n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ? Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les z_i aura un second membre non constant... Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand $t \to +\infty$:

Théorème 7 — **Comportement des trajectoires, cas où A est diagonalisable**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

T1 Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors $X' = AX$ possède des trajectoires divergentes.

T2 Si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).

T3 Si les valeurs propres de A sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers $(0, \ldots, 0)$, seul équilibre du système différentiel.

Confusion d'objets !
Une trajectoire est un sous-ensemble de de $\mathbb{R}^n$ et un équilibre est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou plus précisément une application constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, assimilée à un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)... On comprend bien l'idée tout de même !

⋆ Démonstration : Notons :

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (licite, car A est diagonalisable) telle que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i,
- pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, x_k la k-ième composante de X (où X est une solution de $X' = AX$) et, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $v_{i,k}$ la k-ième composante de V_i.

T1. Supposons que A possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que $\lambda_1 > 0$.
D'après le lemme 1, la fonction $t \longmapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.
Or :

- $\lambda_1 > 0$, donc par produit et composition :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- V_1 est vecteur propre de A, donc V_1 est non nul. Il existe donc $k \in [\![1; n]\!]$, que nous considérons ensuite, tel que la k-ième composante de V_1 soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à $t \longmapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est divergente.

T2. Supposons que les valeurs propres de A sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in [\![1; p]\!], \ \lambda_i = 0 \qquad ; \qquad \forall i \in [\![p+1; n]\!], \ \lambda_i < 0$$

Soit X une solution de $X' = AX$. D'après le théorème 6, il existe des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout $i \in [\![p+1; n]\!]$, $\lambda_i < 0$. D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in [\![p+1; n]\!], \ \lim_{t \to +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \ \forall i \in [\![p+1; n]\!], \ \lim_{t \to +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\lambda_i = 0$. D'où :

$$\forall i \in [\![1; p]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}, \ c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \ \forall i \in [\![1; p]\!], \ \lim_{t \to +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

Petite remarque
Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant $p = n$ et $p = 0$ respectivement).
Dans le cas où $p = 0$, chaque somme $\sum_{i=1}^{p}(\ldots)$ sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^{p} c_i v_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $\sum_{i=1}^{p} c_i V_i$.

Notons $V = \sum_{i=1}^{p} c_i V_i$ et montrons que V est un équilibre de $X' = AX$.

On sait que, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.
Donc : $\forall i \in [\![1;p]\!],\ V_i \in \ker(A)$. Mais $\ker(A)$ est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.
Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 5, on en déduit que la fonction $t \longmapsto V$ est un équilibre de $X' = AX$.
Conclusion : toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre.

T3. Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où $p = 0$...
On obtient :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $(0, \dots, 0)$.
Bien évidemment, $t \longmapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de $X' = AX$. Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de A sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de A. Ainsi, $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$. Et donc, d'après la propriété 5, $t \longmapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

$\star$