Exercices du chapitre 14

Équations différentielles et systèmes différentiels

Technique

Exercice 1 - ●○○○ - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' - y = -2e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
10. $y' - 4y = e^{2x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
11. $y' - 4y = e^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{4x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
12. $y' + y = 2xe^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2 - ●○○○ - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[x]$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3 - ●●○○ - Un premier système différentiel

Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + y \\ y' & = & y \end{array}\right.$$

Exercice 4 - ●●○○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \ : \ \left\{\begin{array}{lcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2x & - & 2y \end{array}\right.$$

1. Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Trouver les équilibres de (S).
3. Résoudre le système (S).
4. Expliciter une trajectoire non constante qui vers vers $(-2; -2)$.

Entraînement

Exercice 5 - ●●○○ - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-x}$. Établir :

$$\big(f \text{ est solution de } (E)\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 6 - ●●○○ - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' - y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{x}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ' pour que f soit solution de (E).
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7 - ●○○○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array}\right.$$

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A possède une unique valeur propre que l'on déterminera. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T cette matrice.
4. Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$.
   - 4.a. Établir :
   $$X' = AX \iff Y' = TY$$
   - 4.b. Résoudre le système $Y' = TY$.
   - 4.c. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 8 - ●●○○ - De taille 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & -2x & + & y & + & z \\ y' & = & x & - & 2y & + & z \\ z' & = & x & + & y & - & 2z \end{array}\right.$$

Exercice 9 - ●●○○ - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.
   - 1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$? *Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.*
   - 1.b. Déterminer $f(0)$.
   - 1.c. Établir :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$
   - 1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - 1.e. Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème ?
3. Conclure.

Exercice 10 - ●●○○ - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \quad ; \quad f(0) = -4 \qquad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. Posons $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   - 1.a. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
   - 1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.

1.c. Conclure sur les candidats-solutions.

2. **Synthèse**. Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème ?
3. Conclure.

Exercice 11 – ●●●● – Comportement des solutions d'une ED non linéaire

Soit $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $y' = \mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-3y} + \mathrm{e}^{-5y}$. Déterminer les limites de y et y' en $+\infty$.

Concours

Exercice 12 – ●●○○ – EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \ \ ; \ \ y''(0) = 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x, $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.
2. **Diagonalisation de A.**

2.a. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

2.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$. *On prendra, si possible, des matrices colonnes dont la première composante vaut 1.*

2.c. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2.d. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.

3.a. Déterminer $Z(0)$.

3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.

4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

Exercice 13 – ●●○○ – EDHEC 2023 Appli

Partie 1. Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

3.a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big)$.

3.b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Partie 2. Réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans la suite, on suppose que pour tout $t > 1$:

- $\mathbb{P}\big([Y > t]\big\rangle 0$
- la loi de $\dfrac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. 5.a. Établir :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

5.b. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et en déduire :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

5.c. Montrer enfin :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$. On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.
Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

6.a. Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.

6.b. En notant K la constante évoquée à la question précédente, donner toutes les solutions de (E_1).

6.c. Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de (E_2).

6.d. Montrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_1).

6.e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions y définies par : $\forall t > 1,\ y(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$.

7. 7.a. Montrer finalement que l'on a : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$.

7.b. Vérifier que la relation s'étend à $[1;+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.