



14

ANALYSE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

INTRODUCTION...

Les fonctions de deux variables réelles (et plus généralement les fonctions à plusieurs variables) représentent un outil très utilisé dans les domaines tels que l'économie, la santé, la physique... afin de modéliser des phénomènes concrets.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à une rapide étude des fonctions de deux variables : représentations graphiques, continuité, recherche d'extrema. De façon générale, tout le calcul différentiel et le calcul intégral vus sur les fonctions d'une variable peuvent s'étendre aux fonctions de deux variables : notion de différentielle, intégrales multiples, équations aux dérivées partielles... L'ampleur de la tâche serait considérable si nous devions explorer tous ces aspects. Ces domaines sont relativement récents, essentiellement XIX^{ème} et XX^{ème} siècle, et comme assez souvent, leur développement mathématique est lié à des nécessités dans d'autres disciplines telles que celles mentionnées ci-dessus.

POUR BIEN DÉMARRER...

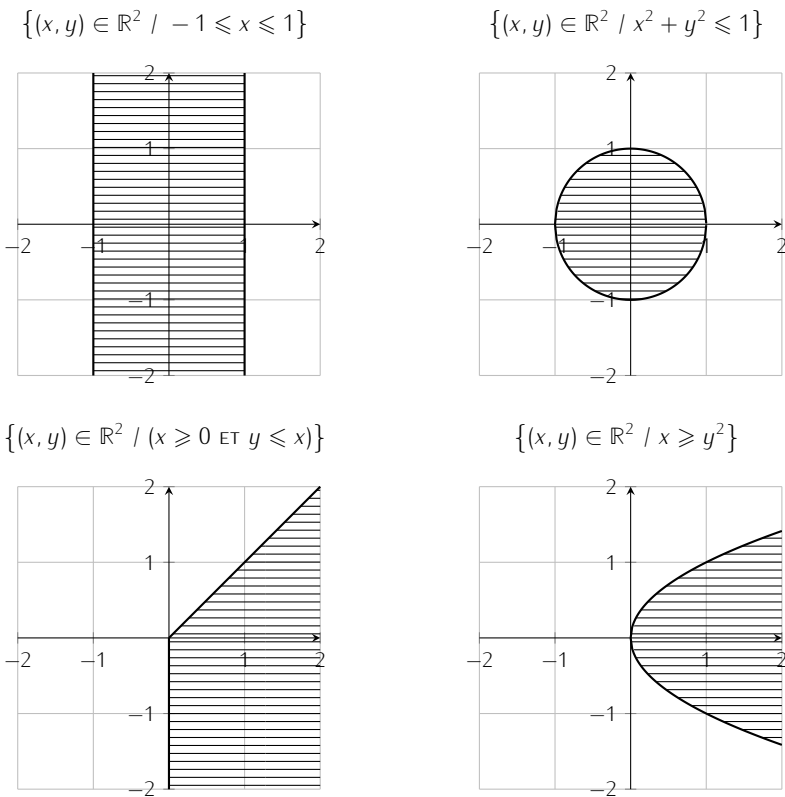
1. Dans le plan, qu'est-ce le cercle de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque fermé de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$? Le disque ouvert de centre le point $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$?
2. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D . Définition du graphe de f :
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I .
 - Définition quantifiée de " f est continue en a " :
 - La fonction f est dérivable en a lorsque :
 - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque :
 - Si I est un intervalle ouvert et que f est dérivable sur I , que dire de $f'(a)$ dans le cas où f admet un extremum local en a ?

Dans tout ce chapitre, on confondra point du plan et couple de $\mathbb{R}^2$. Si A est le point du plan de coordonnées (x_A, y_A) , on écrira $A = (x_A, y_A)$.

I UN PEU DE TOPOLOGIE DANS $\mathbb{R}^2$...

Commençons par représenter quelques ensembles...

EXEMPLE 1



DÉFINITION 1DISTANCE (HP)

Soit E un ensemble. Une **distance** sur E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

✓ $\forall (x_1, x_2) \in E^2, d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

✓ $\forall (x_1, x_2) \in E^2, (d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2)$

✓ $\forall (x_1, x_2, x_3) \in E^3, d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$

(symétrie)

(séparation)

(inégalité triangulaire)

PROPRIÉTÉS 1DISTANCES EUCLIDIENNES SUR $\mathbb{R}$ ET $\mathbb{R}^2$

P1

L'application $d : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 - x_2| \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

P2

L'application $d : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \longmapsto & \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

★ DÉMONSTRATION :

P1. Aucune difficulté particulière.

P2. La démonstration de l'inégalité triangulaire pour cette distance est plus technique et ne présente pas de réel intérêt ici.

★

Remarque

Puisque $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$, la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ étend bien la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$... et on imagine assez bien la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Notation

Puisqu'il s'agit d'une distance entre deux points du plan, on notera souvent $d(A, B)$ la distance entre $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$.

DÉFINITION 2BOULES OUVERTES

Soient A un point du plan et $r \in \mathbb{R}^{++}$.
La **boule ouverte de centre A et de rayon r** , notée $B(A, r)$, est l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$.

Autrement dit :

Dans le plan, $B(A, r)$ est le disque de centre A et de rayon r sans son contour, c'est-à-dire sans le cercle de centre A et de rayon r .

On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$.

D1 D est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ lorsque :

$$\forall M \in D, \exists r > 0 \mid B(M, r) \subset D$$

D2 D est un **fermé** de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2 \setminus D$ (le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$) est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

D3 D est un ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $D \subset B(0, r)$.

En gros...

Un ensemble D est un ouvert s'il ne contient aucun point de sa frontière...

Autrement dit :

Un ensemble est borné si on peut l'inclure dans une boule.

EXEMPLES 2

On ne démontre pas les résultats qui suivent, sauf le premier...

E1 Une boule ouverte est un ouvert.

E2 Une boule fermée (boule ouverte + contour) est un fermé.

E3 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $[a, b] \times [c, d]$ est fermé et borné.

E4 Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $c < d$, l'ensemble $]a, b[\times]c, d[$ est ouvert.

E5 $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont à la fois ouverts et fermés.

E6 Une boule est bornée.

E7 Une droite n'est pas bornée.

E8 L'ensemble $\mathbb{R} \times [-1; 2]$ est fermé mais non borné.

E9 $[0; 1] \times]0; 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

II FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES

II.1 DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 4

FONCTION DE DEUX VARIABLES RÉELLES À VALEURS RÉELLES, APPLICATIONS PARTIELLES

- D1** On appelle **fonction de deux variables réelles à valeurs réelles** toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- D2** Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les applications $f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0)$ et $f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)$ sont appelées **applications partielles de f en (x_0, y_0)** .

Important !

Les applications partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!

EXEMPLES 3

- E1** La distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.
- E2** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, la fonction $(x, y) \mapsto x^n y^m$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, appelée **fonction monôme de deux variables**.
Une **fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$** est une combinaison linéaire de fonctions monômes sur $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions suivantes sont polynomiales sur $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 ; (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 ; (x, y) \mapsto 1 + xy ; (x, y) \mapsto x^2 + x$$

- E3** Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$. Elles sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**.

- E4** Dans chaque cas, donnons une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ qui soit non nulle et vérifiant les conditions données :

- qui s'annule une infinité de fois :
- qui s'annule sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées :

- E5** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$?

Rappel...

Une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls.

II.2 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

DÉFINITION 5

GRAPHE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe de f** l'ensemble :

$$\{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x, y)\}$$

Important !

Le graphe d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une surface dans l'espace.

DÉFINITION 6

LIGNE DE NIVEAU

Soient f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau a de f** l'ensemble :

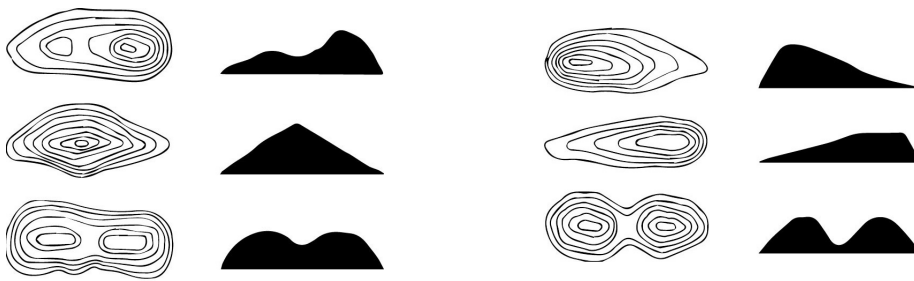
$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = a\}$$

Important !

Une ligne de niveau d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est soit vide, soit un point, soit une courbe du plan.

EXEMPLES 4

- E1** Les amateurs de randonnée sont des habitués des lignes de niveau... Car on trouve sur les cartes ce que l'on appelle des **courbes de niveaux** (ou isohypse d'un point de vue météorologique) : les courbes reliant les points du plan d'égale altitude.



En gros...

On coupe la surface à l'horizontale à la hauteur a et la courbe obtenue (que l'on projette sur le plan) est la ligne de niveau a . On peut donc voir le graphe de f comme la surface obtenue par union des lignes de niveau, chacune étant remontée à sa "hauteur" (le niveau).

E2 Sur une carte météo, chaque point du globe est associé à un unique couple (x, y) de coordonnées sur cette carte.

La fonction qui à chaque point du globe associe sa pression atmosphérique au sol est une fonction de deux variables réelles. Ses lignes de niveau sont visibles sur les cartes météo : ce sont les **isobares**.

Voir dernière page pour d'autres exemples et graphiques.

PROPRIÉTÉ 2

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Deux lignes de niveau différentes n'ont aucun point commun.

Autrement dit :

Deux lignes de niveau sont soit confondues soit d'intersection vide.

* DÉMONSTRATION : Soient a, b deux réels distincts. Notons L_a et L_b les lignes de niveaux a et b de f . Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in L_a \cap L_b$.

Puisque $(x_0, y_0) \in L_a$, on a :

$$f(x_0, y_0) = a$$

Puisque $(x_0, y_0) \in L_b$, on a :

$$f(x_0, y_0) = b$$

Par conséquent :

$$a = b$$

Ce qui est absurde.

Par conséquent, $L_a \cap L_b = \emptyset$. Deux lignes de niveau différentes n'ont donc aucun point commun.

*

III CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

DÉFINITION 7

LIMITE FINIE EN UN POINT

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D , à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. La fonction f admet pour limite le réel ℓ en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall M \in D, \left(d(M, M_0) < \delta \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon \right)$$

Notations

On note alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

THÉORÈME 1

UNICITÉ DE LA LIMITE.

Si une fonction de deux variables possède une limite finie en un point, alors cette limite est unique.

* DÉMONSTRATION : Analogie à celle sur les fonctions d'une variable...

*

DÉFINITIONS 8

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1 Soit $(x_0, y_0) \in D$. Notons $M_0 = (x_0, y_0)$. La fonction f est continue en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall M \in D, \left(d(M, M_0) < \delta \implies |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon \right)$$

D2 On dit que f est continue sur D si f est continue en chaque point de D .

Autrement dit :

f est continue en (x_0, y_0) lorsque $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ existe et que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

EXEMPLES 5

- E1** Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- E2** Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- E3** Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles $f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0, \cdot)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- E4** Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.
- Les applications partielles de f en 0 sont constantes égales à 0, donc sont continues sur $\mathbb{R}$, et en particulier continues en 0...
 - En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent : f ne possède pas de limite en $(0, 0)$ (car $f(x, y)$ se rapproche de 0 si $x = 0$ ou $y = 0$, mais se rapproche de $\frac{1}{2}$ si $x = y$) et n'est donc pas continue en $(0, 0)$.

Important !

Ne regarder que la limite des applications partielles se résume à arriver en M_0 par la gauche, la droite, le haut et le bas seulement !
 Pour qu'une fonction de deux variables soit continue en M_0 , il faut $f(M)$ se rapproche de $f(M_0)$ *peu importe la façon dont M se rapproche de M_0* ... Et pas seulement selon quelques directions particulières...

PROPRIÉTÉS 3

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$ ainsi que f et g deux fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- P1** Si f est continue sur D , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue sur D .
- P2** Si f et g sont continues sur D , alors $f + g$ est continue sur D .
- P3** Si f et g sont continues sur D , alors fg est continue sur D .
- P4** Si f et g sont continues sur D et que g ne s'annule pas sur D , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur D .
- P5** Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } D \\ f(D) \subset I \\ \varphi \text{ continue sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow (\varphi \circ f \text{ continue sur } D)$$

Remarque

Ces propriétés seront encore valables dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^2$, mais avant, il va falloir définir les notions de fonction de deux variables $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$!

* DÉMONSTRATION : Admises.

*

EXEMPLES 6

- E1** Considérons la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.
 On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 0$. Ainsi, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite :
- ✓ la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
 - ✓ la fonction $\varphi = \sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Par composition, la fonction $\varphi \circ f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$; autrement dit, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- E2** Montrons que l'application $g : (x, y) \mapsto \ln(y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Rédaction

On veillera à détailler soigneusement les continuités des fonctions de deux variables... On peut d'ailleurs s'inspirer de cette rédaction pour justifier la continuité d'une composée de deux fonctions d'une variable...

À retenir...

Si $g : (x, y) \mapsto \varphi(y)$, alors en notant $h : (x, y) \mapsto y$, on a $g = \varphi \circ h$.
 Ainsi, si φ est continue sur I , g est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de h continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans I et φ continue sur I .

IV CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans toute cette partie, D désignera un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

IV.1 A L'ORDRE 1...

DÉFINITIONS 9

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE 1, GRADIENT

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D1 Soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0) lorsque l'application $f(\cdot, y_0)$ est dérivable en x_0 .

$$\text{On note alors } \partial_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

D2 On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D lorsqu'elle en admet une en tout point de D . On note alors $\partial_1 f : (x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$ la fonction définie sur D , appelée **dérivée partielle de f d'ordre 1 par rapport à la première variable**.

D3 Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(x, y) \in D$, on appelle **gradient de f en (x_0, y_0)** , noté $\nabla f(x_0, y_0)$, la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0, y_0) \\ \partial_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Si f admet des dérivées partielles sur D , on définit alors l'application $\nabla f : (x, y) \mapsto \nabla f(x, y)$ sur D .

Pourquoi ?

On se place sur un ouvert afin que l'application $x \mapsto \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$ soit bien définie sur un ensemble non vide.

Autrement dit :

f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable lorsque l'application partielle associée est dérivable !

Définition

De la même façon, on définit $\partial_2 f$...

Vocabulaire

- ∂ se lit 'd rond'
- le symbole ∇ est appelé 'na-bla'.

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour calculer les dérivées partielles d'ordre 1 :

- on fixe y et on dérive $x \mapsto f(x, y)$ par rapport à x pour obtenir $\partial_1 f(x, y)$;
- on fixe x et on dérive $y \mapsto f(x, y)$ par rapport à y pour obtenir $\partial_2 f(x, y)$.

✍ Rédaction

On fixe y pour calculer $\partial_1 f(x, y)$, mais seulement dans notre tête. On ne fixe pas y dans la rédaction.

EXEMPLE 7

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + xy + e^y$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2 + xy + e^y$ est une fonction polynomiale en x , elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) = 2x + y$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto x^2 + xy + e^y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une fonction affine en y et de la fonction exponentielle.
Ainsi, f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_2 f(x, y) = x + e^y$$

DÉFINITION 10

FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur D lorsque les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent et sont continues sur D .

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise les théorèmes généraux (propriétés 3, valables avec $\mathcal{C}^1$), comme nous le faisons dans le cas des fonctions d'une seule variable...

EXEMPLE 8

Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour finir sur cette sous-partie :

PROPRIÉTÉ 4

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D , alors f est continue sur D .

* DÉMONSTRATION : Admise.

✗ Attention !

L'existence des dérivées partielles ne garantit pas la continuité de la fonction sur tout D ! En effet, on peut encore une fois considérer la fonction étudiée dans Exemples 5 - E4, qui possède des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$, mais qui n'est toujours pas continue en $(0, 0)$.
En fait, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 ne fait que garantir la continuité des deux applications partielles.

IV.2 A L'ORDRE 2...

Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 1, les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont des fonctions de deux variables définies sur l'ouvert D ... On peut donc se demander si elles-mêmes admettent des dérivées partielles d'ordre 1...

DÉFINITIONS 11

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE 2, HESSIENNE

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

D1 On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur D , notée $\partial_{1,1}^2 f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D .

D2 On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première puis la seconde variable sur D , notée $\partial_{2,1}^2 f$, lorsque la fonction $\partial_1 f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D .

D3 Lorsque f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(x_0, y_0) \in D$, on appelle **hessienne de f en (x_0, y_0)** , notée $\nabla^2 f(x_0, y_0)$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) \\ \partial_{2,1}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque

- $\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f)$
- $\partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f)$

Définition

De la même façon, on définit $\partial_{2,2}^2 f$ et $\partial_{1,2}^2 f$.

DÉFINITION 12

FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^2$** sur D lorsque les fonctions $\partial_{1,1}^2 f$, $\partial_{2,1}^2 f$, $\partial_{1,2}^2 f$ et $\partial_{2,2}^2 f$ existent et sont continues sur D .

EXEMPLE 9

Les fonctions polynomiales à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, on utilise les théorèmes généraux (propriétés 3, valables avec $\mathcal{C}^2$), comme nous le faisons dans le cas des fonctions d'une seule variable...

On retrouve :

PROPRIÉTÉ 5

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

★ DÉMONSTRATION : Admise.

★

EXEMPLE 10

Démontrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^{-y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminons sa matrice hessienne en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Un peu d'histoire

Il s'agit là encore d'Hermann Schwarz (1843-1921, allemand), et non de Laurent Schwartz (1915-2002, français). En 1734, Euler énonçait que le résultat était toujours valable, sans l'hypothèse de continuité des dérivées partielles d'ordre 2... Schwarz fournit un contre-exemple en 1873 et démontra le théorème.

THÉORÈME 2

THÉORÈME DE SCHWARZ

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D , alors $\partial_{1,2}^2 f = \partial_{2,1}^2 f$. En particulier, la hessienne de f en tout $(x, y) \in D$ est symétrique.

♥ Astuce du chef ♥

On utilise ce théorème pour vérifier les calculs plutôt que pour essayer de gagner quelques secondes à dériver...

★ DÉMONSTRATION : A notre portée, mais on l'admet tout de même.

★

V EXTREMA DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

V.1 DÉFINITIONS ET PREMIERS EXEMPLES

DÉFINITIONS 13

EXTREMA LOCAUX ET GLOBAUX

Soient D une partie de $\mathbb{R}^2$, $M_0 \in D$ et f une fonction définie sur D à valeurs réelles.

D1 On dit que f admet un **maximum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r > 0 \mid \forall M \in D \cap B(M_0, r), f(M) \leq f(M_0)$$

D2 On dit que f admet un **minimum local** en M_0 lorsque :

$$\exists r > 0 \mid \forall M \in D \cap B(M_0, r), f(M) \geq f(M_0)$$

D3 On dit que f admet un **maximum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M \in D, f(M) \leq f(M_0)$$

D4 On dit que f admet un **minimum global** en M_0 lorsque :

$$\forall M \in D, f(M) \geq f(M_0)$$

Autrement dit :

Un maximum local en M_0 est un maximum sur un certain voisinage de M_0 .

Remarque

Comme pour les fonctions d'une variable, un extremum global est en particulier un extremum local et la réciproque est évidemment fausse.

♣ Méthode !

Pour montrer que $f(M_0)$ n'est pas un extremum global, il suffit de trouver un contre-exemple d'un point M tel que $f(M) > f(M_0)$ ou $f(M) < f(M_0)$ selon la nature étudiée.

EXEMPLES 11

E1 Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$. En reconnaissant le début d'un carré, démontrons que f possède un minimum global et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

Confusion d'objets !

M_0 n'est pas l'extremum ! M_0 est un point...

E2 Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

- Démontrons : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \leq \frac{1}{2}$.

- Dédouisons-en que $\frac{1}{2}$ est un maximum global de f et précisons en quel(s) point(s) il est atteint.

THÉORÈME 3

THÉORÈME DES BORNES

Si une fonction est continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, alors cette fonction est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

Autrement dit :

Si f est continue sur une partie fermée et bornée, alors f admet un maximum global et un minimum global sur cette partie.

★ DÉMONSTRATION : Admis.

★

V.2 ÉTUDE DES EXTREMA LOCAUX

DÉFINITION 14

POINT CRITIQUE

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D à valeurs réelles. On dit que M_0 est un **point critique** de f lorsque $\nabla f(M_0) = 0_{2,1}$.

Autrement dit, (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\begin{cases} \partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2 f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

Important !

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, l'hypothèse " D est un ouvert" est fondamentale. En effet, sinon, M_0 pourrait être sur la frontière de D et fournir un extremum local sans pour autant que le gradient soit nul en M_0 .

THÉORÈME 4

CONDITION NÉCESSAIRE D'EXTREMA LOCAL SUR UN OUVERT

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $M_0 \in D$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D à valeurs réelles. Si f admet un extremum local en M_0 , alors M_0 est un point critique de f .

Autrement dit :

Les points critiques fournissent des extrema locaux *possibles*.

★ DÉMONSTRATION : Admis.

★

Attention !

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque est fautive... On pense à la fonction cube pour les fonctions d'une variable.

♣ **MÉTHODE 4** ♣ Pour démontrer qu'un point critique ne fournit pas un extremum local, on cherche à trouver une direction sur laquelle f lui est strictement supérieure et une direction selon f lui est strictement inférieure.

EXEMPLES 12

E1 Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f , puis que f ne possède pas d'extremum local en ce point.

E2 Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f , puis que f ne possède pas d'extremum local en ce point.

THÉORÈME 5

NATURE DES POINTS CRITIQUES

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D à valeurs réelles.

- T1** Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0) .
- T2** Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0) .
- T3** Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont **non nulles** et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) .
- T4** Si (x_0, y_0) est un point critique de f et que qu'au moins une des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ est nulle, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point critique.

✗ Attention !

Dans les deux premiers cas, on peut conclure sur un extremum local, pas un extremum global !

Vocabulaire

On parle alors de **point col** ou **point selle** (de cheval).

★ DÉMONSTRATION : À notre portée, mais on l'admet tout de même...

★

♣ MÉTHODE 5 ♣ Pour étudier les points critiques d'une fonction f ,

- on s'assure de se placer sur un ouvert et que f est $\mathcal{C}^2$ ($\mathcal{C}^1$ pour les points critiques, $\mathcal{C}^2$ pour étudier leur nature avec la hessienne) sur cet ouvert,
- on recherche les points critiques : ce sont les solutions du système
$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases}$$

Attention : ce n'est presque jamais un système linéaire... Tous les moyens sont bons si ce n'est pas le cas : substitution, disjonction de cas, analyse-synthèse...
- on détermine la hessienne de f en chacun des points critiques,
- ensuite on peut déterminer les valeurs propres de chaque hessienne, puis :
 - dans le cas de **T1**, **T2**, et **T3** on conclut directement sur l'**aspect local** ;
 - dans le cas de **T4**, **tout est possible** (point col, minimum, maximum) !
- pour étudier le caractère global d'un extremum local :
 - pour montrer que f possède un minimum (ou maximum) global en (x_0, y_0) , on doit montrer :

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0$$

(ou ≤ 0)

- pour montrer que $f(x_0, y_0)$ n'est pas un minimum (ou maximum) global, on peut chercher un contre-exemple de point (x_1, y_1) tel que $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ (ou $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$).

♣ Méthode !

Bien entendu, si l'énoncé guide, on se laisse faire !

♥ Astuce du chef ♥

J'ai bien écrit "on peut déterminer les valeurs propres", pas "on doit"... En effet :

- λ est VP de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ssi $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
- on rappelle que le produit des racines du polynôme $X^2 - sX + p$ est égal à p et la somme à s ...

Ainsi :

- si $ad - bc > 0$, alors les deux VP sont non nulles et de même signe, signe donné par le signe de $a + d$
- si $ad - bc < 0$, alors les deux VP sont non nulles et de signes opposés
- si $ad - bc = 0$, alors au moins une des VP est nulle

♣ Méthode !

Pour montrer que $f(x_0, y_0)$ est un maximum/minimum global, on peut aussi, à x fixé, étudier le signe de la fonction $y \mapsto f(x, y) - f(x_0, y_0)$ (en utilisant toutes les méthodes usuelles pour étudier le signe d'une fonction...).

EXEMPLES 13

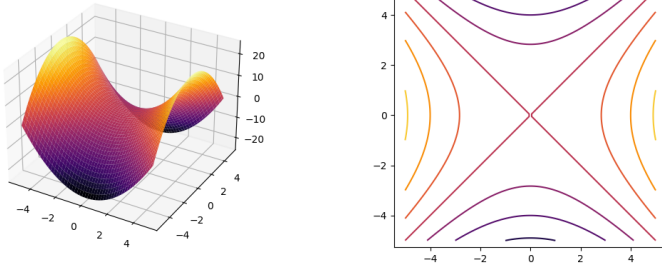
E1 Étudions les points critiques de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

E2 Démontrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ possède un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un minimum local en ce point critique. Établissons qu'il s'agit même d'un minimum global.

E3 Démontrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 + 2xy - 12x - 4y + 24$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et déterminons-le.

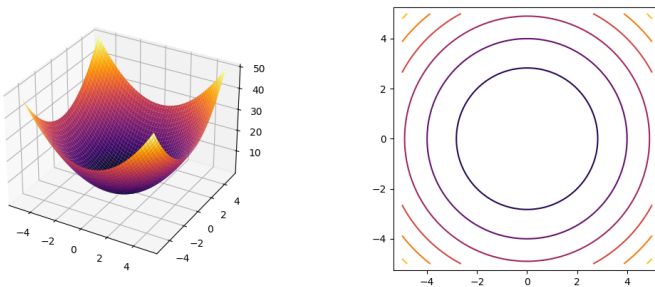
EXEMPLES 14

E1 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:



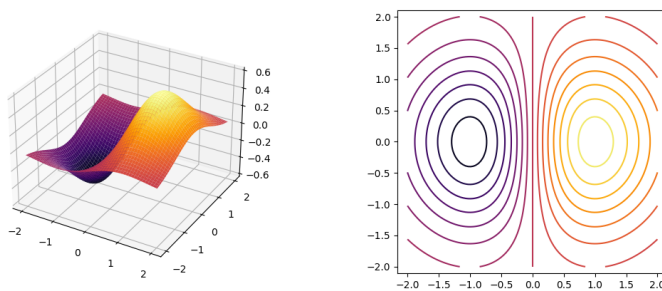
Déterminons les lignes de niveaux 0 et 1 de f .

E2 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:



Que dire des lignes de niveaux de f ?

E3 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ sur $[-2; 2] \times [-2; 2]$:



E4 Surface et lignes de niveaux correspondantes de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sur $[-5; 5] \times [-5; 5]$:

