

EXERCICES DU CHAPITRE 14

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

TECHNIQUE

EXERCICE 1 – ●●●

Déterminer les points critiques et leur nature (locale) pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
2. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 4xy - 2$, définie sur $\mathbb{R}^2$
3. $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$, définie sur $\mathbb{R}^2$
4. $f : (x, y) \mapsto y(x^2 + \ln(y)^2)$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$
5. $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^3 - 3y - 2$, définie sur $\mathbb{R}^2$ (plus difficile)

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 2 – ●●○ – Extrema globaux

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de f et étudier leur nature locale.
2. En étudiant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto f(x, y)$, démontrer que les extrema trouvés en question précédente sont globaux.

CONCOURS

EXERCICE 3 – ●●● – HEC 2008 E

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère le nuage de points $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ et on suppose que les réels $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux, et qu'il en est de même des réels $y_1, \dots, y_n$.

On notera $\bar{x}$ la moyenne du n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ et σ_x sont écart-type. On définit également $\bar{y}$ et σ_y pour la série y .

On considère ensuite la fonction $f : (a, b) \mapsto \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$.

1. Rappeler l'expression de $\bar{x}$ et σ_x .
2. Justifier que le coefficient de corrélation linéaire du couple (x, y) , noté $r(x, y)$, existe et rappeler son expression.
3. Justifier que la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Démontrer que f possède un unique point critique, noté $(\hat{a}, \hat{b})$, que l'on exprimera en fonction de $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x^2 et $\text{Cov}(x, y)$.
5. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .
6. Établir : $f(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - r(x, y)^2)$.
7. En déduire que $|r(x, y)| \leq 1$. Que dire du nuage de points lorsque $|r(x, y)| = 1$?