# Exercices du chapitre 14
## Convergence de suites de variables aléatoires

## Technique

### Exercice 1 - ●●○ - Fonction de répartition empirique

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi, de fonction de répartition notée $F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_{n,x}$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_{n,x}(\omega) = \mathrm{Card}\left(\left\{i \in [\![1;n]\!] \ / \ X_i(\omega) \leqslant x\right\}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_{n,x} = \dfrac{1}{n} Z_{n,x}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{1}_{[X_i \leqslant x]}$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_{[X_i \leqslant x]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [X_i \leqslant x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donner la loi de $\mathbb{1}_{[X_i \leqslant x]}$.
2. Déterminer la loi de $Z_{n,x}$ puis donner son espérance et sa variance.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|T_{n,x} - F(x)| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$.

### Exercice 2 - ●●○

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance et une variance. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ et qu'il existe un réel $\ell$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \ell$.

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left((X_n - \ell)^2\right) = \mathbb{V}(X_n) + \left(\mathbb{E}(X_n - \ell)\right)^2$.
2. En déduire : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|X_n - \ell| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$.

### Exercice 3 - ●○○

On définit, pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x e^{\frac{-n^2x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est une densité de probabilité.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ admet pour densité $f_n$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## Entraînement

### Exercice 4 - ●○○ - Classique

Considérons une variable aléatoire $X$ suivant la loi $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$.

1. On considère la variable aléatoire $X^* = \dfrac{2X - n}{\sqrt{n}}$. Donner l'espérance et la variance de $X^*$.
2. Par quelle loi peut-on approcher la variable aléatoire $X^*$ si $n$ est assez grand ?
   Montrer qu'alors, pour $n$ suffisamment grand, une valeur approchée de $\mathbb{P}\left([X \geqslant N]\right)$ est $\Phi\left(\dfrac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$, où $\Phi$ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

### Exercice 5 - ●○○ - Classique

Considérons une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{P}(5)$. On note $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. Quelle est la loi de $Y_k$ ?
2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $\Phi(\alpha) = 0,99$. Établir : $\alpha > 0$.
3. Justifier que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left([Y_k - 5k > \alpha\sqrt{5k}]\right) = 0,01$.

## Exercice 6 – ●●○

Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, avec $p \in ]0;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - 1.a. Déterminer la loi de $Y_n$.
   - 1.b. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_n; Y_{n+1})$.
2. Justifier que si $|n-p| \geqslant 2$, alors $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_p) = 0$.
3. Démontrer : $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   - 4.a. Déterminer l'espérance et la variance de $Z_n$.
   - 4.b. En déduire : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

# Concours

## Exercice 7 – ●●○ - EDHEC 2013 E

1. On considère la fonction $f$ définie pour tout $x$ réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   - 1.a. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)dx$.
   - 1.b. Vérifier que $f$ peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire $X$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant $f$ comme densité.

2. 
   - 2.a. Établir l'existence de l'espérance de $X$, puis donner sa valeur.
   - 2.b. Établir l'existence de la variance de $X$, puis donner sa valeur.
3. Montrer que la fonction de répartition de $X$, notée $F_X$, est définie par : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On pose $Y = |X|$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $F_Y$ sa fonction de répartition.

4. 
   - 4.a. Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque $x$ est strictement négatif.
   - 4.b. Pour tout réel $x$ positif ou nul, déterminer $F_Y(x)$.
   - 4.c. En déduire que $Y$ est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de $Y$ est la fonction $g$ définie par : $g : x \mapsto \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   - 4.d. Montrer que $Y$ possède une espérance et une variance et les déterminer.
5. On considère deux variables aléatoires $U$ et $V$, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.
   On pose $I = \min(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a $M(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$.
   On admet que $M$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour finir, on note $F_I$ la fonction de répartition de $M$.
   - 5.a. Expliciter $F_M(x)$ pour tout réel $x$.
   - 5.b. En déduire que $M$ suit la même loi que $Y$.
   - 5.c. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction `Python` permettant d'obtenir une réalisation de la variable aléatoire $Y$.
6. On considère plus généralement $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Déterminer la fonction de répartition de $M_n$ et montrer que la suite $(M_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

## Exercice 8 – ●●○ - EML 2014 E

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, la variable $X_n$ prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 4, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout $k$ de $[\![1, n+1]\!]$, on note $N_k$ la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k$-ième tirage.

## Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. **1.a.** Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables $N_1, N_2, N_3$. En déduire $\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big)$.

   **1.b.** Montrer que $\mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big)$.
2. Calculer l'espérance de $X_3$.

## Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, $n$ est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Déterminer $X_n(\Omega)$.
4. Pour tout $k$ de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de $N_k$ et rappeler son espérance et sa variance.
5. Calculer $\mathbb{P}\big([X_n = n+1]\big)$.
6. Montrer, pour tout $i$ de $[\![1, n]\!]$ : $\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([X_n = 2]\big) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
7. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$.
8. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
   En déduire que $\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
9. Montrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n > k]\big)$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.
10. Démontrer : $\forall k \in [\![2; n+1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

## Partie III : Une convergence en loi

Dans cette partie, on s'intéresse à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, on pose $u_k = \dfrac{k-1}{k!}$.
    Démontrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ définit une loi de probabilité. On considère alors une variable aléatoire $Z$ dont la loi est donnée par la suite $u$.
12. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers $Z$.
13. Montrer que $Z$ admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

## Exercice 9 – ●●○ - EDHEC 2021 E

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. **1.a.** Vérifier que la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire $Y$.

   **1.b.** On note $F$ la fonction de répartition de $Y$. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.
2. **2.a.** Vérifier que la fonction $g$ qui à tout réel $x$ associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire $X$.

   **2.b.** On note $G$ la fonction de répartition de $X$. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que $X$.
   Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   **3.a.** On note $G_n$ la fonction de répartition de $M_n$. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction $G$ puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de $x$.

   **3.b.** En déduire que la variable aléatoire $M_n$ est à densité.

   **3.c.** On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition $F_n$ de $Y_n$ est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$
4. Déterminer, pour tout réel $x$ négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
5. **5.a.** Soit $x$ un réel strictement positif.
   Vérifier que, dès que $n$ est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

**5.b.** Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque $u$ est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel $x$ strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de $Y$.

## Exercice 10 - ●●○ - EDHEC 2022 S

On désigne par $a$ un réel et on considère une variable aléatoire $X$, de densité $f$ strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée $F$. On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a, \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

1. Montrer que $g$ est bien définie et peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire $Y$.
2. On note $G$ la fonction de répartition de $Y$.

   **2.a.** Exprimer, pour tout réel $x$, $G(x)$ à l'aide de $F$.

   **2.b.** Vérifier que l'on a, pour tout réel $x$ :

$$G(x) = \mathbb{P}_{[X\leqslant a]}\big([X \leqslant x]\big)$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que $Y$.

3. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire à densité dont on note $G_n$ la fonction de répartition.

   **3.a.** Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de $G$, puis à l'aide de $F$.

   **3.b.** Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

4. On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et on note $H_n$ la fonction de répartition de $Z_n$.

   **4.a.** Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\dfrac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   **4.b.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   **4.c.** En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ dont on reconnaîtra la loi.