15

Analyse

Équations différentielles

Introduction...

Les équations différentielles sont apparues au XVIIème siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.
Ce n'est qu'à partir du XVIIIème siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les équations différentielles

I.1 Premières définitions

Définitions 1 — Équation différentielle, solution, trajectoire, équilibre

D1 On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ des fonctions définies et continues sur I, telles que a_n n'est pas la fonction nulle.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3 Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4 Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6 Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

> **Remarque**
> Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y **la fonction inconnue** d'une équation différentielle.

> **Vocabulaire**
> Les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

> **✘ Attention !**
> Il s'agit d'une égalité de fonctions !

> **Remarque**
> Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de $\mathbb{R}$.

Exemples 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \longmapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

> **Confusion d'objets !**
> Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

> **En fait...**
> Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y...

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

E4 L'équation $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(E_H) : y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H).

- Cherchons une solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$. On la notera f_p.

> **Vocabulaire**
> On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E).

I.2 La linéarité, c'est le pied !

Propriétés 1 — **Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL**

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

P1 S_H est un espace vectoriel.

P2 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale de l'EDL	$=$	solution particulière de l'EDL	$+$	solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \left\{ f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H \right\}$$

Important ! Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

Remarque La démonstration est analogue dans le cas général...

$\star$ Démonstration : Démontrons ce résultat dans le cas particulier d'une EDL1 normalisée à coefficient constant. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $b \in \mathscr{C}(I, R)$ et :

$$(E) : y' + ay = b$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. On a : $S_H = \{y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \ / \ y' + ay = 0\}$.

$\star$

Propriété 2 — **Principe de superposition**

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2), alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

⋆ Démonstration : Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2). Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2), elles sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et donc $\lambda f_1 + \mu f_2$ également.
Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}\right) && \text{linéarité de la somme}\\
&= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} a_k f_2^{(k)} && f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2)\\
&= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. ⋆

Exemple 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$ est
Une solution particulière de $y' + y = x$ est

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est la fonction $f_p : x \longmapsto 2x + 1$.

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL du premier ordre à coefficients constants

Définition 2 — **EDL1 à coefficients constants**

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).
Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

II.1 Résolution d'une EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$,
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

Théorème 1 — **Résolution de $y' + ay = 0$**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(f \text{ est solution de } y' + ay = 0\right) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}\right)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda e^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $\left(x \longmapsto e^{-ax}\right)$.

⋆ DÉMONSTRATION :

Question :

⋆

EXEMPLES 3

E1 L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est

E2 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\left\{x \longmapsto -2 + \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque
Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière… Une idée à avoir en tête : la chercher "sous la même forme" que le second membre.

E3 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ MÉTHODE 1 ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{b}{a}$ convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé…

II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions… En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 2 — de Cauchy sur EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\left\{ \begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

Démonstration : En exercice.

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques.
Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais.
Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

En effet :
Si deux trajectoires ont un point commun, en (x_0, y_0), alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

♣ Méthode 2 ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

III EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3 — EDL2 à coefficients constants

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).
Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

III.1 Résolution d'une EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	$=$	solution particulière de l'EDL	$+$	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$,
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

Définition 4 — Équation caractéristique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3 — Résolution de $y'' + ay' + by = 0$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :
- si $\Delta > 0$:

$$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$$

- si $\Delta = 0$:

T1 Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

T2 Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

⋆ Démonstration :

⋆

Exemples 4

E1 L'équation $y'' - y' - 6y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$. Les solutions de $r^2 - r - 6 = 0$ sont -2 et 3.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ est

E2 L'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. L'unique solution de $r^2 + 2r + 1 = 0$ est -1.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ est

E3 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ est $\left\{x \longmapsto 1 + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

E4 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ Méthode 3 ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 Problème de Cauchy sur EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation $(E) : y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions...
En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 4 — de Cauchy sur EDL2

Si a et b sont des réels réel et c une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\left\{\begin{array}{l} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \ ; \ y'(x_0) = z_0 \end{array}\right.$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

⋆ Démonstration : Celui-ci, on l'admet !

⋆

♣ Méthode 4 ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

Exemple 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\left\{\begin{array}{l} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.