Les Chartreux

15

Analyse

Équations différentielles

Introduction...

Les équations différentielles sont apparues au XVIIème siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.
Ce n'est qu'à partir du XVIIIème siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques - l'analyse numérique - développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les équations différentielles

I.1 Premières définitions

Définitions 1 — **Équation différentielle, solution, trajectoire, équilibre**

D1 On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ des fonctions définies et continues sur I, telles que a_n n'est pas la fonction nulle.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3 Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4 Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6 Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

> **Remarque**
> Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y **la fonction inconnue** d'une équation différentielle.

> **Vocabulaire**
> Les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

> **✗ Attention !**
> Il s'agit d'une égalité de fonctions !

> **Remarque**
> Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de $\mathbb{R}$.

Exemples 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \longmapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

> **Confusion d'objets !**
> Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc… sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes…

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

$$y' + 2y = 2x^2 \quad ; \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad ; \quad y''' - 3y' + y = e^x + 1 \quad ; \quad y' + 2xy = 0$$

> **En fait…**
> Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y…

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

$$y' + y^2 = 0 \quad ; \quad \frac{y'}{y} = x \quad ; \quad y'y = e^x$$

E4 L'équation $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(E_H) : y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La fonction f_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) - 2x f_\lambda(x) &= 2x\lambda e^{x^2} - 2x\lambda e^{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Conclusion : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \longmapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H).

- Cherchons une solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$. On la notera f_p.
  Soit $f \in \mathbb{R}_1[x]$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
  On a :

$$\begin{aligned} \big(f \text{ est solution de } (E)\big) &\iff f' - 2xf = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2xf(x) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a - 2x(ax + b) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2ax^2 - 2bx + a = -1 \end{aligned}$$

> **Vocabulaire**
> On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E).

$$\iff \begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$ est la fonction $f_p : x \longmapsto -x$.

I.2 La linéarité, c'est le pied !

Propriétés 1 — Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

P1 S_H est un espace vectoriel.

P2 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H). Autrement dit :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H\}$$

Important ! Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

Remarque La démonstration est analogue dans le cas général...

$\star$ Démonstration : Démontrons ce résultat dans le cas particulier d'une EDL1 normalisée à coefficient constant. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $b \in \mathscr{C}(I, R)$ et :

$$(E) : y' + ay = b$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. On a : $S_H = \{y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \ / \ y' + ay = 0\}$.

P1.
- $S_H \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
- S_H est non vide car la fonction nulle vérifie l'équation $y' + ay = 0$.
- Montrons que S_H est stable par combinaison linéaire.
  Soient $f, g \in S_H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  - Puisque $f, g \in S_H$, on a $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, car $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.
  - Ensuite, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)' + a(\lambda f + \mu g) &= \lambda f' + \mu g' + \lambda a f + \mu a g \\ &= \lambda(f' + af) + \mu(g' + ag) \\ &= 0 \qquad f, g \in S_H\end{aligned}$$

  Par conséquent : $\lambda f + \mu g \in S_H$. Ainsi, S_H est stable par combinaison linéaire.

Important ! Être dans S_H c'est deux choses : être de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et vérifier l'équation $y' + ay = 0$.

Conclusion : S_H est un espace vectoriel.

P2. Soit $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et supposons connue une solution particulière de (E), notée f_p. On a :

$$\begin{aligned} y \in S_E &\iff y' + ay = b \\ &\iff y' + ay = f_p' + af_p \qquad f_p \text{ solution de } (E)\text{, donc } f_p' + af_p = b \\ &\iff (y - f_p)' + a(y - f_p) = 0 \qquad \text{linéarité de la dérivation} \\ &\iff y - f_p \in S_H \\ &\iff \exists f_H \in S_H \ / \ y - f_p = f_H \\ &\iff \exists f_H \in S_H \ / \ y = f_p + f_H \end{aligned}$$

Conclusion : $S_E = \{f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H\}$.

$\star$

Propriété 2 — Principe de superposition

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2), alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

⋆ Démonstration : Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2). Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2), elles sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et donc $\lambda f_1 + \mu f_2$ également.
Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}\right) && \text{linéarité de la somme}\\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} a_k f_2^{(k)} && f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2)\\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. ⋆

Exemple 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$ est la fonction $f_1 : x \longmapsto 1$.
Une solution particulière de $y' + y = x$ est la fonction $f_1 : x \longmapsto x - 1$.

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est la fonction $f_p : x \longmapsto 2x + 1$.

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL du premier ordre à coefficients constants

Définition 2 — **EDL1 à coefficients constants**

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).
Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

II.1 Résolution d'une EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$,
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

Théorème 1 — **Résolution de $y' + ay = 0$**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(f \text{ est solution de } y' + ay = 0\right) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}\right)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda e^{-ax},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $\left(x \longmapsto e^{-ax}\right)$.

Démonstration : Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$.

- La fonction $x \longmapsto -ax$ est affine donc $\mathscr{C}^1$ sur I. Par conséquent, f est $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -a\lambda e^{-ax} + a\lambda e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $y' + ay = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une solution de $y' + ay = 0$. Montrons : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$.
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x)e^{ax} = \lambda$$

Posons alors la fonction $g : x \longmapsto f(x)e^{ax}$ et montrons qu'elle est constante sur I.
La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur I, car elle est solution de $y' + ay = 0$, donc la fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur I, comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + f(x)ae^{ax} \\ &= e^{ax}\big(f'(x) + af(x)\big) \\ &= 0 && f \text{ est solution de } y' + ay = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction g est dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle, cette fonction est donc constante sur I. Il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) = \lambda$. Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}$$

Conclusion : $\big(f \text{ est solution de } y' + ay = 0\big) \iff \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{-ax}\big)$

✓ Rigueur !
Une solution de $y' + ay = 0$ est une fonction f qui vérifie :
- f est $\mathscr{C}^1$ sur I,
- $f' + af = 0$.

Question :
Une fonction dérivable et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$?

Exemples 3

E1 L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

E2 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\left\{x \longmapsto -2 + \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

E3 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de $y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto x$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' + y = x + 1$ est $\left\{x \longmapsto x + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque
Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher "sous la même forme" que le second membre.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{b}{a}$ convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 Problème de Cauchy sur EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 2 — de Cauchy sur EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\left\{\begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire
Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

Démonstration : En exercice.

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques.
Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais.
Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

En effet :
Si deux trajectoires ont un point commun, en (x_0, y_0), alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

III EDL du second ordre à coefficients constants

Définition 3 — EDL2 à coefficients constants

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.
Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire
On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).
Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

III.1 Résolution d'une EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$,
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

Définition 4 — Équation caractéristique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3 — Résolution de $y'' + ay' + by = 0$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Remarque
On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :
• si $\Delta > 0$:
$\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x}\right)$
• si $\Delta = 0$:

T1 Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

T2 Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}\big)$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\left\{x \in I \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

$\star$ Démonstration :

T1. Supposons $\Delta > 0$ et notons r_1 et r_2 les deux solutions distinctes de $r^2 + ar + b = 0$.
Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que : $\forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(a) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a\big(\lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}\big) + b\big(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\big) \\ &= \lambda e^{r_1 x}(r_1^2 + ar_1 + b) + \mu e^{r_2 x}(r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 && r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $y'' + ay' + by = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une solution de $y'' + ay' + by = 0$. Montrons : $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) e^{-r_1 x} = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1) x}$$

Posons alors la fonction $g : x \longmapsto f(x) e^{-r_1 x}$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, car elle est solution de $y'' + ay' + by = 0$, donc la fonction g est également de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) e^{-r_1 x} - r_1 f(x) e^{-r_1 x} \\ &= e^{-r_1 x}\big(f'(x) - r_1 f(x)\big) \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r_1 e^{-r_1 x}\big(f'(x) - r_1 f(x)\big) + e^{-r_1 x}\big(f''(x) - r_1 f'(x)\big) \\ &= e^{-r_1 x}\big(f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)\big) \\ &= e^{-r_1 x}\big(-af'(x) - bf(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)\big) && f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0 \\ &= e^{-r_1 x}\big((-a - 2r_1) f'(x) + (r_1^2 - b) f(x)\big) \\ &= e^{-r_1 x}\big((r_2 - r_1) f'(x) - r_1(r_2 - r_1) f(x)\big) && r_1 + r_2 = -a \text{ et } r_1 r_2 = b \\ &= (r_2 - r_1) e^{-r_1 x}\big(f'(x) - r_1 f(x)\big) \\ &= (r_2 - r_1) g'(x) && \text{calcul ci-dessus} \end{aligned}$$

> ☞ **Rappel...**
> Si $x^2 - Sx + p = 0$ admet deux solutions (distinctes ou non) notées x_1 et x_2, alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$ (car on a alors $x^2 - Sx + p = (x - x_1)(x - x_2)$...).

Par conséquent, la fonction g' est solution de l'équation $y' - (r_2 - r_1)y = 0$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$$

Et donc, puisque $r_2 - r_1 \neq 0$ (car $r_1 \neq r_2$) et que I est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $x \in I$:

$$g(x) = \lambda + \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x}$$

> **Important !**
> Le fait que I soit un intervalle est nécessaire... Si $h' = 0$ sur $\mathfrak{R}$, alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $h = C_1$ sur $]-\infty; 0[$ et $h = C_2$ sur $]0; +\infty[$...

En posant $\mu = \dfrac{\alpha}{r_2 - r_1}$, on obtient :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Conclusion : $\big(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\big) \iff \big(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}\big)$.

T2. Supposons $\Delta = 0$ et notons r_0 l'unique solution de $r^2 + ar + b = 0$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sans difficulté, en utilisant le fait que $r_0^2 + ar_0 = b = 0$...

$\boxed{\Rightarrow}$ On raisonne de la même façon que pour **T1** ; en posant cette fois $g : x \longmapsto f(x)e^{-r_0 x}$.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 0$$

Puisque I est un intervalle, il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I$, $g'(x) = \lambda$. Et donc :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I, \ g(x) = \lambda x + \mu$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I, \ f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$$

Conclusion : $\left(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0\right) \iff \left(\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in I, \ f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}\right)$.

> **Remarque**
> Les calculs de $g'(x)$ et de $g''(x)$ du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitaient pas que $r_1 \neq r_2$.

★

Exemples 4

E1 L'équation $y'' - y' - 6y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$. Les solutions de $r^2 - r - 6 = 0$ sont -2 et 3.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ est $\{x \longmapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E2 L'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. L'unique solution de $r^2 + 2r + 1 = 0$ est -1.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ est $\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E3 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- **Solution particulière.**
  On remarque que la fonction $x \longmapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ est $\left\{x \longmapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

E4 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- **Solution particulière.**
  Remarquons que :
  - la fonction $x \longmapsto \dfrac{-1}{4}$ est solution particulière de $y'' - 4y = 1$.
  - la fonction $x \longmapsto -x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x$.

  Par principe de superposition, la fonction $x \longmapsto \dfrac{-1}{4} - x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x + 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - 4y = 4x + 1$ est $\left\{x \longmapsto \dfrac{-1}{4} - x + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

♣ **Méthode 3** ♣ **Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \longmapsto \dfrac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 Problème de Cauchy sur EDL2

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation $(E) : y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions...
En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

Théorème 4 — de Cauchy sur EDL2

Si a et b sont des réels réel et c une fonction continue sur I, alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \ \ ; \ \ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

> **Vocabulaire**
> Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

★ Démonstration : Celui-ci, on l'admet !

⋆

♣ MÉTHODE 4 ♣ **Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

EXEMPLE 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\left\{\begin{array}{l} y''+y'-2y=1-2x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{array}\right.$ d'inconnue $y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- **Résolution de $y''+y'-2y=1-2x$.**
  Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
  - **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
    L'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=0$ est $\left\{x\longmapsto \lambda e^x+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
  - **Solution particulière.**
    Remarquons que la fonction $x\longmapsto x$ est solution particulière de $y''+y'-2y=1-2x$.

  Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=1-2x$ est $\left\{x\longmapsto x+\lambda e^x+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
- Le problème donné est un problème de Cauchy, qui admet donc une unique solution, notée f.
  D'après ce qui précède, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x+\lambda e^x+\mu e^{-2x}$$

Or $f(0)=f'(0)=0$, d'où :

$$\lambda+\mu=0\ \ ;\ \ 1+\lambda-2\mu=0$$

Remarque
Ne pas hésiter à commencer par calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$ avant de donner $f'(0)$...

Mais :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=0\\ \lambda-2\mu=-1\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=0\\ -3\mu=-1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{-1}{3}\\ \mu=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Conclusion : l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $f: x\longmapsto x-\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{1}{3}e^{-2x}$.