Exercices du chapitre 15
Équations différentielles

Exercice 1 - ●○○ - Résolution d'EDL1
Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = \mathrm{e}^x + x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$
7. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.
8. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
9. $y' - 4y = \mathrm{e}^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{4x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
10. $y' + y = 2x\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 - ●○○ - Résolution d'EDL2
Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière dans $\mathbb{R}_2[x]$.
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\mathrm{e}^{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax^2+bx+c)e^{x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 - ●●○ - Problèmes de Cauchy
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Justifier qu'il existe une unique fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
   et la déterminer.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = x \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 1 \end{cases}$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 - ●●○ - Méthode de variation de la constante
On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit λ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Posons $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-x}$. Établir :
$$\big(f \text{ est solution de } (E)\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$$
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 5 - ●●○ - EDL1 à coefficients non constants (cas général)
Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, et on note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E).

1. Justifier que a possède des primitives sur I. *On notera A l'une d'elles.*
2. Soit A une primitive de a sur I.
   Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_H) est $\left\{x \longmapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p.
   Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Établir que f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$.
4. Soient λ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f : x \longmapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E).
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
6. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique fonction y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

7. **Applications.**
   - 7.a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$, où y est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   - 7.b. Résoudre le problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{l} y' - \dfrac{1}{x}y = x^2 \\ y(1) = 0 \end{array}\right.$, où y est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 6 - ●●○ - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (\star)$$

1. Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.
   - 1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
     Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $f(0) \neq 0$.
   - 1.b. Déterminer $f(0)$.
   - 1.c. Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.
   - 1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - 1.e. En déduire qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$.
2. Conclure.

Exercice 7 - ●●● - Changement d'inconnue

Résoudre l'équation différentielle $(E) : x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On pourra considérer la fonction $z : t \longmapsto y(e^t)$.