



15

ANALYSE

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

INTRODUCTION...

Les équations différentielles sont apparues au XVII^{ème} siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.

Ce n'est qu'à partir du XVIII^{ème} siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques – l'analyse numérique – développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

I GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 1

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE, SOLUTION, TRAJECTOIRE, ÉQUILIBRE

D1 On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, a_1, \dots, a_n, b des fonctions définies et continues sur I , telles que a_n n'est pas la fonction nulle.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3 Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4 Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6 Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

Remarque

Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y la **fonction inconnue** d'une équation différentielle.

Vocabulaire

Les fonctions a_0, a_1, \dots, a_n sont les **coefficients de l'équation différentielle**.

⚠ Attention !

Il s'agit d'une égalité de fonctions !

Remarque

Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de \mathbb{R} .

EXEMPLES 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

E4 L'équation $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(E_H) : y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H) .

- Cherchons une solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$. On la notera f_p .

Confusion d'objets !

Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

En fait...

Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y ...

Vocabulaire

On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E) .

I.2 LA LINÉARITÉ, C'EST LE PIED !

PROPRIÉTÉS 1

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UNE EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E , S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

P1 S_H est un espace vectoriel.

P2 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H \mid f_H \in S_H\}$$

Important !

Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

★ DÉMONSTRATION : Voir [Question classique 43](#) pour le cas particulier d'une EDL1 à coefficients constants. La méthode s'adapte dans le cas général.

PROPRIÉTÉ 2

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient a_0, a_1, \dots, a_n ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I .

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) , alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

★ DÉMONSTRATION : Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) . Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Puisque f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2) , elles sont de classe \mathcal{C}^n sur I , et donc $\lambda f_1 + \mu f_2$ également. Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}) && \swarrow \text{linéarité de la somme} \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^n a_k f_2^{(k)} && \swarrow f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

EXEMPLE 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$ est
Une solution particulière de $y' + y = x$ est

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est la fonction $f_p : x \mapsto 2x + 1$.

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 2

EDL1 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).

Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

II.1 RÉOLUTION D'UNE EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$,
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

THÉORÈME 1

RÉSOLUTION DE $y' + ay = 0$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\{x \in I \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $(x \mapsto e^{-ax})$.

★

DÉMONSTRATION :

Question :

★

EXEMPLES 3

E1 L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est

E2 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière.**
On remarque que la fonction $x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\{x \mapsto -2 + \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

E3 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque

Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher 'sous la même forme' que le second membre.

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{b}{a}$ convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 2

DE CAUCHY SUR EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

★ DÉMONSTRATION : En exercice.

★

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais. Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

En effet :

Si deux trajectoires ont un point commun, en (x_0, y_0) , alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

III EDL DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 3

EDL2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I . On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).

Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

III.1 RÉOLUTION D'UNE EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$,
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

DÉFINITION 4

ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

THÉORÈME 3

RÉSOLUTION DE $y'' + ay' + by = 0$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

T1 Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

T2 Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :

- si $\Delta > 0$:
 $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$
- si $\Delta = 0$:
 $(x \mapsto x e^{r_0 x}, x \mapsto e^{r_0 x})$

* DÉMONSTRATION :

T1. Supposons $\Delta > 0$ et notons r_1 et r_2 les deux solutions distinctes de $r^2 + ar + b = 0$.

Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que : $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a(\lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}) + b(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}) \\ &= \lambda e^{r_1 x} (r_1^2 + ar_1 + b) + \mu e^{r_2 x} (r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 + ar + b = 0$$

Ainsi f est solution de $y'' + ay' + by = 0$.

⇒ Soit f une solution de $y'' + ay' + by = 0$. Montrons : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) e^{-r_1 x} = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Posons alors la fonction $g : x \mapsto f(x) e^{-r_1 x}$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur I , car elle est solution de $y'' + ay' + by = 0$, donc la fonction g est également de classe \mathcal{C}^2 sur I et, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = f'(x) e^{-r_1 x} - r_1 f(x) e^{-r_1 x}$$

$$= e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x))$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r_1 e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) + e^{-r_1 x} (f''(x) - r_1 f'(x)) \\ &= e^{-r_1 x} (f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \\ &= e^{-r_1 x} (-af'(x) - bf(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) && \hookrightarrow f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0 \\ &= e^{-r_1 x} ((-a - 2r_1)f'(x) + (r_1^2 - b)f(x)) \\ &= e^{-r_1 x} ((r_2 - r_1)f'(x) - r_1(r_2 - r_1)f(x)) && \hookrightarrow r_1 + r_2 = -a \text{ et } r_1 r_2 = b \\ &= (r_2 - r_1)e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) \\ &= (r_2 - r_1)g'(x) && \hookrightarrow \text{calcul ci-dessus} \end{aligned}$$

Rappel...

Si $x^2 - Sx + p = 0$ admet deux solutions (distinctes ou non) notées x_1 et x_2 , alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$ (car on a alors $x^2 - Sx + p = (x - x_1)(x - x_2)...$).

Par conséquent, la fonction g' est solution de l'équation $y' - (r_2 - r_1)y = 0$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in I, g'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$$

Et donc, puisque $r_2 - r_1 \neq 0$ (car $r_1 \neq r_2$) et que I est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $x \in I$:

$$g(x) = \lambda + \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x}$$

En posant $\mu = \frac{\alpha}{r_2 - r_1}$, on obtient :

$$\forall x \in I, g(x) = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Conclusion : (f est solution de $y'' + ay' + by = 0$) $\iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$.

T2. Supposons $\Delta = 0$ et notons r_0 l'unique solution de $r^2 + ar + b = 0$. Raisonnons par double implication.

\Leftarrow Sans difficulté, en utilisant le fait que $r_0^2 + ar_0 + b = 0$...

\Rightarrow On raisonne de la même façon que pour T1 ; en posant cette fois $g : x \mapsto f(x)e^{-r_0 x}$.

La fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur I et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 0$$

Puisque I est un intervalle, il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I, g'(x) = \lambda$. Et donc :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, g(x) = \lambda x + \mu$$

Autrement dit :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}$$

Conclusion : (f est solution de $y'' + ay' + by = 0$) $\iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x})$.

★

Important !

Le fait que I soit un intervalle est nécessaire... Si $h' = 0$ sur \mathbb{R} , alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $h = C_1$ sur $] -\infty; 0[$ et $h = C_2$ sur $]0; +\infty[$...

Remarque

Les calculs de $g'(x)$ et de $g''(x)$ du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitent pas que $r_1 \neq r_2$.

EXEMPLES 4

E1 L'équation $y'' - y' - 6y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$. Les solutions de $r^2 - r - 6 = 0$ sont -2 et 3 .

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ est

E2 L'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. L'unique solution de $r^2 + 2r + 1 = 0$ est -1 .

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ est

E3 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

• **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

• **Solution particulière.**

On remarque que la fonction $x \mapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ est $\{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E4 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL₂

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 4

DE CAUCHY SUR EDL₂

Si a et b sont des réels réels et c une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; \quad y'(x_0) = z_0 \end{cases}, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}), \text{ possède une et une seule solution.}$$

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

★ DÉMONSTRATION : Celui-ci, on l'admet !

★

♣ **MÉTHODE 4** ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

EXEMPLE 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

IV.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 5

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, SOLUTION

D1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ et b_1, \dots, b_n des fonctions définies et continues sur I .
On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants de taille n** tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont les fonctions inconnues.

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le système différentiel peut se réécrire :

$$X' = AX + B$$

D2 Un **système différentiel linéaire homogène à coefficients constants** est un système linéaire de la forme $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont des fonctions \mathcal{C}^1 sur I inconnues.

D3 Une **solution** du système différentiel $X' = AX + B$ est une application $Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

- ✓ chaque composante est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
- ✓ $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + B(t)$.

Résoudre un système différentiel, c'est trouver toutes ses solutions.

Vocabulaire

Les réels $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système différentiel.

Attention !

Il s'agit d'égalités de fonctions !

Pour info...

En fait, X' n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une *norme* sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Attention !

A est une matrice carrée de réels, X, X' et B sont des fonctions de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $X' = AX + B$ est une égalité de fonctions !

Remarque

Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...

EXEMPLE 6

Réécrivons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sous forme de système différentiel.

Dans toute la suite, on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 5

DE CAUCHY SUR SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Avec les notations précédentes, pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le problème $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy**, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.

★ DÉMONSTRATION : Théorème admis.

★

EXEMPLE 7

Montrons que si Y est une solution non nulle de $X' = AX$ sur I , alors Y ne s'annule pas sur I .

IV.2 STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 3	STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SDL
<p>Soient $(E) : X' = AX + B$ un système différentiel linéaire de taille n et $(E_H) : X' = AX$ son système différentiel linéaire homogène associé. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H).</p>	
P1	S_H est un espace vectoriel
P2	Pour tout $t_0 \in I$, l'application $f : \begin{cases} S_H & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme.
P3	Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :
<div style="border: 1px solid #003366; padding: 10px; display: inline-block;"> $\text{solution générale du SDL} = \text{solution particulière du SDL} + \text{solution générale du SDL homogène associé}$ </div>	
<p>Ou encore, en notant X_p une solution particulière de (E) :</p> $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$	

Conséquence :
On obtient : $\dim(S_H) = n$.

Remarque
Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

★ DÉMONSTRATION :

- P1.** ✓ $S_H \subset \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, qui est un espace vectoriel...
- ✓ S_H est non vide, car l'application $t \mapsto 0_{n,1}$ est solution de $X' = AX$.
- ✓ Soient $X, Y \in S_H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda X + \mu Y \in S_H$.
- * Puisque X et Y sont solution du système différentiel (E) , les composantes de X et Y sont des applications \mathcal{C}^1 sur I . Par conséquent, les composantes de $\lambda X + \mu Y$ également.
 - * Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda X + \mu Y)' &= \lambda X' + \mu Y' \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= A(\lambda X + \mu Y) \end{aligned} \quad \leftarrow X, Y \in S_H$$

Ainsi $\lambda X + \mu Y \in S_H$.

Conclusion : S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, donc c'est un espace vectoriel.

P2. Soit $t_0 \in I$.

- **Linéarité.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in S_H$.
On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= (\lambda X + \mu Y)(t_0) \\ &= \lambda X(t_0) + \mu Y(t_0) \quad \leftarrow \text{linéarité de l'évaluation en } t_0 \text{ pour chacune des composantes...} \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

Conclusion : f est une application linéaire.

- **Bijektivité.** Montrons :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in S_H \mid f(X) = X_0$$

Cela équivaut à établir :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ce résultat est vrai, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Conclusion : f est bijective.

Conclusion : f est un isomorphisme. En particulier : $\dim(S_H) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

P3. Soit X_p une solution particulière de (E) . Soit $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. On a :

$$\begin{aligned} X \in S_E &\iff X' = AX + B \\ &\iff X' - X'_p = AX + B - AX_p + B \\ &\iff (X - X_p)' = A(X - X_p) \\ &\iff X - X_p \in S_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X - X_p = X_H \\ &\iff \exists X_H \in S_H \mid X = X_p + X_H \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} X'_p = AX_p + B, \text{ car } X_p \text{ est solution de } (E) \\ \text{linéarité de la dérivation} \end{array} \right\}$

Conclusion : $S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$.

★

PROPRIÉTÉ 4

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Si X_1 est une solution de $X' = AX + B_1$ et X_2 est une solution de $X' = AX + B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est une solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

★ DÉMONSTRATION : Soient X_1 une solution particulière de $X' = AX + B_1$ et X_2 une solution particulière de $X' = AX + B_2$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Puisque X_1 et X_2 sont solutions respectives de $X' = AX + B_1$ et $X' = AX + B_2$, leurs composantes sont des applications de classe \mathcal{C}^1 sur I , et donc celles de $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ également. Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \\ &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_2 B_2 \\ &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} X_1 \text{ est solution de } X' = AX + B_1 \text{ et } X_2 \text{ de } X' = AX + B_2 \end{array} \right\}$

Conclusion : $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$.

★

IV.3 ÉQUILIBRES ET TRAJECTOIRES

DÉFINITION 6

ÉQUILIBRE D'UN SDL

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

À retenir...
La fonction $t \mapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système $X' = AX + B$ possède un équilibre noté X_0 . Dans ce cas : $\forall t \in I, X_0'(t) = 0$, et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- B est constante,
- $B \in \text{Im}(A)$.

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

PROPRIÉTÉ 5

CARACTÉRISATION DES ÉQUILIBRES DES SYSTÈMES HOMOGÈNES

Soit $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La fonction $t \mapsto Y_0$ est un équilibre de $X' = AX$ si, et seulement si $Y_0 \in \ker(A)$.

À retenir...
Si A est inversible, alors la fonction $t \mapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

★ DÉMONSTRATION : Notons $Y : t \mapsto Y_0$ définie sur \mathbb{R} . Chaque composante de Y étant constante, elle est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On a ensuite, puisqu'on sait déjà que Y est constante :

$$\begin{aligned} (Y \text{ est un équilibre de } X' = AX) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = AY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 = AY(t) \\ &\iff AY_0 = 0 \\ &\iff Y_0 \in \ker(A) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} Y \text{ est constante, donc : } \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = 0 \\ Y \text{ est constante égale à } Y_0 \end{array} \right\}$

★

♣ **MÉTHODE 5** ♣ Pour déterminer les équilibres du système $X' = AX$:

- on détermine $\ker(A)$,
- on conclut avec les bons objets : les équilibres sont des applications de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pas des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 8

Déterminons les équilibres du système différentiel : $(E) : \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$

DÉFINITION 7

TRAJECTOIRE D'UN SDL

Une **trajectoire** de $X' = AX$ est un ensemble $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une solution de $X' = AX$.

Remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduite à un point de \mathbb{R}^n .

PROPRIÉTÉ 6

Si deux trajectoires de $X' = AX$ ont un point commun, alors elles sont confondues.
Autrement dit, deux trajectoires de $X' = AX$ sont soit distinctes, soit confondues.

★ DÉMONSTRATION : Soient $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ et $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ deux trajectoires associées respectivement aux solutions X et Y du système différentiel $Z' = AZ$.
Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun ; autrement dit, supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$.
Ainsi, en notant Z_0 ce point commun, X et Y sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.

Conclusion : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales.

★

DÉFINITIONS 8

TRAJECTOIRE CONVERGENTE, DIVERGENTE

Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de $X' = AX$.

D1 La trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ est **convergente** lorsqu'il existe $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
 $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$.
On dit alors que la trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ converge vers (ℓ_1, \dots, ℓ_n) .

D2 La trajectoire $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

EXEMPLE 9

Voyons comment résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' &= & y &+& z \\ y' &= & x &+& z \\ z' &= & x &+& y \end{cases}.$$

- Justifions que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
- Déterminons les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ . Montrons que l'application $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$.

- Dédisons-en l'ensemble des solutions de $X' = AX$.

- Donnons finalement une trajectoire convergente non constante et une trajectoire divergente de $X' = AX$.

V CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE

L'objectif est de résoudre le système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

LEMME 1

(HP)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et V un vecteur propre de A associé à λ .
La fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution de $X' = AX$ sur \mathbb{R} .

★ DÉMONSTRATION : Notons $Y : t \mapsto e^{\lambda t} V$. Puisque V est constant, chaque composante de Y est une fonction \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} V \\ &= e^{\lambda t} \lambda V \\ &= e^{\lambda t} AV \\ &= A \times (e^{\lambda t} V) \\ &= AY(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} V \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda$$

La fonction $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est donc solution de $X' = AX$ sur \mathbb{R} .

Important !

- Dans le cas où A est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de $X' = AX$. Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
- Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

Remarque

On peut s'imaginer la tête de Y sinon, pour se rendre compte de l'expression de $Y'(t)$...

THÉORÈME 6

RÉSOLUTION DE $X' = AX$, CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE (HP)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.
Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- (V_1, \dots, V_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i .

On a ainsi :

$$(X \text{ est solution de } X' = AX) \iff (\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $X' = AX$ est $\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

Important !

Puisque A est diagonalisable, il existe bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

★ DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons S l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.

1. On sait déjà que S est un espace vectoriel de dimension n (conséquences de Propriétés 3 - P2). Notons, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$.

- D'après le lemme précédent, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, Y_i est solution de $X' = AX$.
- Montrons que la famille (Y_1, \dots, Y_n) est une famille libre de S .
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Supposons $a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n = 0$. Autrement dit, supposons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 Y_1(t) + \dots + a_n Y_n(t) = 0_{n,1}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} V_n = 0_{n,1}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0_{n,1}$$

Or, la famille (V_1, \dots, V_n) est libre (car c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). D'où :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Et ainsi, la famille (Y_1, \dots, Y_n) est libre.

Par conséquent, la famille (Y_1, \dots, Y_n) est une famille de S qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal n , égal à $\dim(S)$.

Conclusion : la famille (Y_1, \dots, Y_n) est une base de S et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \{t \mapsto c_1 Y_1(t) + \dots + c_n Y_n(t), (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...).

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

EXEMPLE 10

Réolvons le système différentiel $(E) : \begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= 3x + 6y \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

★

♣ Méthode !

La première méthode serait guidée. En revanche, pour la seconde, une fois la matrice A diagonalisée, elle est à savoir faire en autonomie.

Et si la matrice A n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ?
 Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les z_i aura un second membre non constant...
 Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand $t \rightarrow +\infty$:

THÉORÈME 7

COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES, CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.

- T1** Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors $X' = AX$ possède des trajectoires divergentes.
- T2** Si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).
- T3** Si les valeurs propres de A sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers $(0, \dots, 0)$, seul équilibre du système différentiel.

Confusion d'objets !

Une trajectoire est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et un équilibre est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou plus précisément une application constante de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, assimilée à un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)... On comprend bien l'idée tout de même !

★ DÉMONSTRATION : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),
- (V_1, \dots, V_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (licite, car A est diagonalisable) telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i ,
- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, x_k la k -ième composante de X (où X est une solution de $X' = AX$) et, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $v_{i,k}$ la k -ième composante de V_i .

T1. Supposons que A possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que $\lambda_1 > 0$.

D'après le lemme 1, la fonction $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est solution de $X' = AX$ sur \mathbb{R} .

Or :

- $\lambda_1 > 0$, donc par produit et composition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- V_1 est vecteur propre de A , donc V_1 est non nul. Il existe donc $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, que nous considérons ensuite, tel que la k -ième composante de V_1 soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$ est divergente.

T2. Supposons que les valeurs propres de A sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lambda_i < 0$$

Soit X une solution de $X' = AX$. D'après le théorème 6, il existe des réels c_1, \dots, c_n tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout $i \in \llbracket p+1; n \rrbracket$, $\lambda_i < 0$. D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

Remarque

Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant $p = n$ et $p = 0$ respectivement).
 Dans le cas où $p = 0$, chaque somme $\sum_{i=1}^p (\dots)$ sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^p c_i v_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $\sum_{i=1}^p c_i V_i$.

Notons $V = \sum_{i=1}^p c_i V_i$ et montrons que V est un équilibre de $X' = AX$.

On sait que, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, V_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Donc : $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $V_i \in \ker(A)$. Mais $\ker(A)$ est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 5, on en déduit que la fonction $t \mapsto V$ est un équilibre de $X' = AX$.

Conclusion : toutes les trajectoires de $X' = AX$ convergent vers un équilibre.

T3. Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où $p = 0$...

On obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à X converge vers $(0, \dots, 0)$.

Bien évidemment, $t \mapsto 0_{n,1}$ est un équilibre de $X' = AX$. Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de A sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de A . Ainsi, $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$. Et donc, d'après la propriété 5, $t \mapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

★