



# 15

## ANALYSE

### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

---

#### INTRODUCTION...

Les équations différentielles sont apparues au XVII<sup>ème</sup> siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.

Ce n'est qu'à partir du XVIII<sup>ème</sup> siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques – l'analyse numérique – développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

Dans tout le chapitre,  $I$  désigne un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

# I GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

### DÉFINITIONS 1

### ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE, SOLUTION, TRAJECTOIRE, ÉQUILIBRE

- D1** On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction  $y$  (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.
- D2** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n, b$  des fonctions définies et continues sur  $I$ , telles que  $a_n$  n'est pas la fonction nulle.  
On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre  $n$**  une équation de la forme :
- $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$
- où  $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.
- D3** Par convention, la fonction  $y$  et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.
- D4** Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.
- D5** Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.
- D6** Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

### Remarque

Souvent,  $f$  est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera  $y$  la **fonction inconnue** d'une équation différentielle.

### Vocabulaire

Les fonctions  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont les **coefficients** de l'équation différentielle.

### Attention !

Il s'agit d'une égalité de fonctions !

### Remarque

Si l'intervalle  $I$  n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de  $\mathbb{R}$ .

### EXEMPLES 1

- E1** L'équation  $y'' \times y' + 3y^2 = g$ , où  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$ , est une équation différentielle. Une solution  $f$  de cette équation différentielle est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

- E2** Sont des équations différentielles linéaires :

- E3** Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

### Confusion d'objets !

Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et  $x$  n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

### En fait...

Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en  $y$ ...

- E4** L'équation  $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$ , où  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et  $(E_H) : y' - 2xy = 0$  est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$  est solution de  $(E_H)$ .

### Vocabulaire

On a ainsi trouvé une **solution particulière** de  $(E)$ .

- Cherchons une solution de  $(E)$  qui soit dans  $\mathbb{R}_1[x]$ . On la notera  $f_p$ .

## I.2 LA LINÉARITÉ, C'EST LE PIED !

### PROPRIÉTÉS 1

### STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UNE EDL

Soient  $(E)$  une équation différentielle linéaire et  $(E_H)$  son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons  $S_E$  l'ensemble des solutions de  $E$ ,  $S_H$  l'ensemble des solutions de  $(E_H)$ .

**P1**  $S_H$  est un espace vectoriel.

**P2** Toute solution de  $(E)$  est obtenue en ajoutant à une solution particulière de  $(E)$  une solution quelconque de  $(E_H)$ . Autrement dit :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

Ou encore, en notant  $f_p$  une solution particulière de  $E$  :

$$S_E = \{f_p + f_H \mid f_H \in S_H\}$$

#### Important !

Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

\* DÉMONSTRATION : Voir [Question classique 43](#) pour le cas particulier d'une EDL1 à coefficients constants. La méthode s'adapte dans le cas général.

### PROPRIÉTÉ 2

### PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ainsi que  $b_1$  et  $b_2$  des fonctions continues sur  $I$ .

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si  $f_1$  est une solution particulière de  $(E_1)$  et  $f_2$  une solution particulière de  $(E_2)$ , alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

\* DÉMONSTRATION : Soient  $f_1$  une solution particulière de  $(E_1)$  et  $f_2$  une solution particulière de  $(E_2)$ . Soient également  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont des solutions respectives de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , elles sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et donc  $\lambda f_1 + \mu f_2$  également. Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^n a_k f_2^{(k)} \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de la somme} \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array}$$

Conclusion : la fonction  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution de  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ .

### EXEMPLE 2

Une solution particulière de  $y' + y = 1$  est  
Une solution particulière de  $y' + y = x$  est

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de  $y' + y = 3 + 2x$  est la fonction  $f_p : x \mapsto 2x + 1$ .

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

## II EDL DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

### DÉFINITION 2

### EDL1 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient  $a_0$  et  $a_1$  des réels tels que  $a_1 \neq 0$  et  $b$  une fonction définie et continue sur  $I$ .

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.

Puisque  $a_1 \neq 0$ , on a, pour tout  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  :

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

#### Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme :  $y' + ay = b$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b$  une fonction continue sur  $I$ ).

Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

### II.1 RÉSOLUTION D'UNE EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\begin{array}{ccc} \text{solution générale} & = & \text{solution particulière} \\ \text{de l'EDL} & & \text{de l'EDL} \end{array} + \text{solution générale de} \\ \text{l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène  $y' + ay = 0$ ,
- trouver une solution particulière de  $y' + ay = b$ ...

### THÉORÈME 1

### RÉSOLUTION DE $y' + ay = 0$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y' + ay = 0$  est  $\{x \in I \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

#### Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de  $y' + ay = 0$ . On en a même une base :  $(x \mapsto e^{-ax})$ .

\* DÉMONSTRATION :

#### Question :

### EXEMPLES 3

**E1** L'équation  $y' + 2y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est

**E2** On considère l'équation différentielle  $y' - 3y = 6$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de  $y' - 3y = 0$  est  $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

- **Solution particulière.**

On remarque que la fonction  $x \mapsto -2$  est une solution particulière de  $(E)$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions l'équation différentielle  $y' - 3y = 6$  est  $\{x \mapsto -2 + \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Remarque**

Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher "sous la même forme" que le second membre.

**E3** Résolvons l'équation différentielle  $y' + y = x + 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer une solution particulière de  $y' + ay = b$  :**

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si  $b$  est constante, la fonction constante  $x \mapsto \frac{b}{a}$  convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

## II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation  $(E) : y' + ay = b$  admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

### THÉORÈME 2

### DE CAUCHY SUR EDL1

Si  $a$  est un réel et  $b$  une fonction continue sur  $I$ , alors pour tous  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , le problème  $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ , possède une et une seule solution.

**Vocabulaire**

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition  $y(x_0) = y_0$  en est la **condition initiale**.

\* DÉMONSTRATION : En exercice.

\*

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais. Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

**En effet :**

Si deux trajectoires ont un point commun, en  $(x_0, y_0)$ , alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

**♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :**

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante  $\lambda$  dans la forme générale des solutions.

## III EDL DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

### DÉFINITION 3

### EDL2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient  $a_0, a_1, a_2$  des réels tels que  $a_2 \neq 0$  et  $b$  une fonction définie et continue sur  $I$ .

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où  $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  est la fonction inconnue.

Puisque  $a_2 \neq 0$ , on a, pour tout  $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

### Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme :  $y'' + ay' + by = c$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c$  une fonction continue sur  $I$ ).

Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par la faire...

## III.1 RÉSOLUTION D'UNE EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\begin{array}{ccc} \text{solution générale} & = & \text{solution particulière} \\ \text{de l'EDL} & & \text{de l'EDL} \end{array} + \text{solution générale de} \\ \text{l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène  $y'' + ay' + by = 0$ ,
- trouver une solution particulière de  $y'' + ay' + by = c$ ...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

### DÉFINITION 4

### ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

L'équation  $r^2 + ar + b = 0$ , d'inconnue  $r \in \mathbb{R}$ , est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ .

### THÉORÈME 3

### RÉSOLUTION DE $y'' + ay' + by = 0$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\Delta$  le discriminant associé à l'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$ .

**T1** Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{x \in I \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

**T2** Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation  $r^2 + ar + b = 0$  admet une solution  $r_0$  et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$  est  $\{x \in I \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

### Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de  $y'' + ay' + by = 0$ . On en a même une base :

- si  $\Delta > 0$  :  $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$
- si  $\Delta = 0$  :  $(x \mapsto x e^{r_0 x}, x \mapsto e^{r_0 x})$

### DÉMONSTRATION :

**T1.** Supposons  $\Delta > 0$  et notons  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions distinctes de  $r^2 + ar + b = 0$ .

Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

$\Leftarrow$  Supposons qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tels que :  $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f''(x) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a(\lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}) + b(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}) \\ &= \lambda e^{r_1 x} (r_1^2 + ar_1 + b) + \mu e^{r_2 x} (r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{, } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 + ar + b = 0$$

Ainsi  $f$  est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ .

$\Rightarrow$  Soit  $f$  une solution de  $y'' + ay' + by = 0$ . Montrons :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ .

Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) e^{-r_1 x} = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Posons alors la fonction  $g : x \mapsto f(x) e^{-r_1 x}$ .

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , car elle est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ , donc la fonction  $g$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$  :

$$g'(x) = f'(x) e^{-r_1 x} - r_1 f(x) e^{-r_1 x}$$

$$= e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x))$$

puis :

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= -r_1 e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) + e^{-r_1 x} (f''(x) - r_1 f'(x)) \\
 &= e^{-r_1 x} (f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \\
 &= e^{-r_1 x} (-af'(x) - bf(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \\
 &= e^{-r_1 x} ((-a - 2r_1)f'(x) + (r_1^2 - b)f(x)) \\
 &= e^{-r_1 x} ((r_2 - r_1)f'(x) - r_1(r_2 - r_1)f(x)) \\
 &= (r_2 - r_1)e^{-r_1 x} (f'(x) - r_1 f(x)) \\
 &= (r_2 - r_1)g'(x)
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  *f* est solution de  $y'' + ay' + by = 0$   
 $\hookrightarrow r_1 + r_2 = -a$  et  $r_1 r_2 = b$   
 $\hookrightarrow$  calcul ci-dessus

Par conséquent, la fonction  $g'$  est solution de l'équation  $y' - (r_2 - r_1)y = 0$ , qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in I, g'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$$

Et donc, puisque  $r_2 - r_1 \neq 0$  (car  $r_1 \neq r_2$ ) et que  $I$  est un intervalle, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que l'on considère ensuite, tel que pour tout  $x \in I$  :

$$g(x) = \lambda + \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x}$$

En posant  $\mu = \frac{\alpha}{r_2 - r_1}$ , on obtient :

$$\forall x \in I, g(x) = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

**Conclusion :** (*f* est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ )  $\iff$  ( $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ ).

**T2.** Supposons  $\Delta = 0$  et notons  $r_0$  l'unique solution de  $r^2 + ar + b = 0$ . Raisonnons par double implication.

$\iff$  Sans difficulté, en utilisant le fait que  $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ ...

$\Rightarrow$  On raisonne de la même façon que pour **T1** ; en posant cette fois  $g : x \mapsto f(x)e^{-r_0 x}$ .

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout  $x \in I$  :

$$g''(x) = 0$$

**Important !**  
 Le fait que  $I$  soit un intervalle est nécessaire... Si  $h' = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que  $h = C_1$  sur  $]-\infty; 0]$  et  $h = C_2$  sur  $[0; +\infty[$ ...

#### Remarque

Les calculs de  $g'(x)$  et de  $g''(x)$  du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitaient pas que  $r_1 \neq r_2$ .

Puisque  $I$  est un intervalle, il existe donc un réel  $\lambda$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $g'(x) = \lambda$ . Et donc :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, g(x) = \lambda x + \mu$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

**Conclusion :** (*f* est solution de  $y'' + ay' + by = 0$ )  $\iff$  ( $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$ ).

#### EXEMPLES 4

**E1** L'équation  $y'' - y' - 6y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est  $r^2 - r - 6 = 0$ . Les solutions de  $r^2 - r - 6 = 0$  sont  $-2$  et  $3$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' - y' - 6y = 0$  est

**E2** L'équation  $y'' + 2y' + y = 0$  est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . L'unique solution de  $r^2 + 2r + 1 = 0$  est  $-1$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' + 2y' + y = 0$  est

**E3** On considère l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
 Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$  est  $\{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- Solution particulière.**

On remarque que la fonction  $x \mapsto 1$  est une solution particulière de  $y'' + 2y' + y = 1$ .

**Conclusion :** l'ensemble des solutions de  $y'' + 2y' + y = 1$  est  $\{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu) e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ .

**E4** Résolvons l'équation différentielle  $y'' - 4y = 4x + 1$ , d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

♣ MÉTHODE 3 ♣ Pour déterminer une solution particulière de  $y'' + ay' + by = c$  :

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche) ; en particulier, si  $c$  est constante, la fonction constante  $x \mapsto \frac{c}{b}$  (quand  $b \neq 0$ ) convient ;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

### III.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL<sub>2</sub>

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) :  $y'' + ay' + by = c$  admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

#### THÉORÈME 4

#### DE CAUCHY SUR EDL<sub>2</sub>

Si  $a$  et  $b$  sont des réels réel et  $c$  une fonction continue sur  $I$ , alors pour tous  $x_0 \in I$  et  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ , le problème

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; \quad y'(x_0) = z_0 \end{cases}, \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}), \text{ possède une et une seule solution.}$$

#### Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = z_0$  en sont les **conditions initiales**.

\* DÉMONSTRATION : Celui-ci, on l'admet !

♣ MÉTHODE 4 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  dans la forme générale des solutions.

#### EXEMPLE 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant :  $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$  d'inconnue  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

# IV GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

## IV.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 5	SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, SOLUTION
<p><b>D1</b> Soient <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, <math>(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathbb{R}^{n^2}</math> et <math>b_1, \dots, b_n</math> des fonctions définies et continues sur <math>I</math>. On appelle <b>système différentiel linéaire à coefficients constants de taille <math>n</math></b> tout système de la forme :</p> $\begin{cases} x'_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots & \\ x'_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$ <p>où <math>x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})</math> sont les fonctions inconnues. En notant :</p> $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ <p>le système différentiel peut se réécrire :</p> $X' = AX + B$	<p><b>Vocabulaire</b> Les réels <math>a_{i,j}</math> sont les <b>coefficients</b> du système différentiel.</p> <p><b>Attention !</b> Il s'agit d'égalités de fonctions !</p> <p><b>Pour info...</b> En fait, <math>X'</math> n'est pas qu'une notation... Si l'on définissait une <b>norme</b> sur <math>\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math> (ce n'est pas ce qui manque), on pourrait donner une définition de dérivabilité pour les fonctions <math>X : I \rightarrow \mathbb{R}^n</math>.</p> <p><b>Attention !</b> <math>A</math> est une matrice carrée de réels, <math>X</math>, <math>X'</math> et <math>B</math> sont des fonctions de <math>I</math> dans <math>\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math>, et <math>X' = AX + B</math> est une égalité de fonctions !</p> <p><b>Remarque</b> Le programme d'ECG ne semble porter que sur les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants, mais nous donnerons quelques résultats généraux tout de même...</p>

### EXEMPLE 6

Réécrivons l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  sous forme de système différentiel.

Dans toute la suite, on considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

THÉORÈME 5	DE CAUCHY SUR SYSTÈME DIFFÉRENTIEL
<p>Avec les notations précédentes, pour tout <math>t_0 \in I</math> et tout <math>X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math>, le problème <math>\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}</math> d'inconnue <math>X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))</math> possède une et une seule solution.</p>	<p><b>Vocabulaire</b> Un tel problème est appelé <b>problème de Cauchy</b>, et on avait un résultat analogue dans le cas des EDL1 et EDL2.</p>

\* DÉMONSTRATION : Théorème admis.

### EXEMPLE 7

Montrons que si  $Y$  est une solution non nulle de  $X' = AX$  sur  $I$ , alors  $Y$  ne s'annule pas sur  $I$ .

## IV.2 STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 3	STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UN SDL
	Soient $(E) : X' = AX + B$ un système différentiel linéaire de taille $n$ et $(E_H) : X' = AX$ son système différentiel linéaire homogène associé. Notons $S_E$ l'ensemble des solutions de $E$ , $S_H$ l'ensemble des solutions de $(E_H)$ .
P1	$S_H$ est un espace vectoriel
P2	Pour tout $t_0 \in I$ , l'application $f : \begin{cases} S_H & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme.
P3	Toute solution de $(E)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de $(E)$ une solution quelconque de $(E_H)$ . Autrement dit :
	$\text{solution générale} \quad = \quad \text{solution particulière} \quad + \quad \text{solution générale du}$ $\text{du SDL} \qquad \qquad \qquad \text{du SDL} \qquad \qquad \qquad \text{SDL homogène associé}$
	Ou encore, en notant $X_p$ une solution particulière de $(E)$ :
	$S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$

### DÉMONSTRATION :

- P1. ✓  $S_H \subset \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , qui est un espace vectoriel...  
✓  $S_H$  est non vide, car l'application  $t \mapsto 0_{n,1}$  est solution de  $X' = AX$ .  
✓ Soient  $X, Y \in S_H$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\lambda X + \mu Y \in S_H$ .
- \* Puisque  $X$  et  $Y$  sont solution du système différentiel  $(E)$ , les composantes de  $X$  et  $Y$  sont des applications  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . Par conséquent, les composantes de  $\lambda X + \mu Y$  également.
  - \* Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda X + \mu Y)' &= \lambda X' + \mu Y' \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= A(\lambda X + \mu Y) \end{aligned} \quad \text{, } X, Y \in S_H$$

Ainsi  $\lambda X + \mu Y \in S_H$ .

**Conclusion :**  $S_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ , donc c'est un espace vectoriel.

- P2. Soit  $t_0 \in I$ .

- **Linéarité.** Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $X, Y \in S_H$ .  
On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= (\lambda X + \mu Y)(t_0) \\ &= \lambda X(t_0) + \mu Y(t_0) \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned} \quad \text{, linéarité de l'évaluation en } t_0 \text{ pour chacune des composantes...}$$

**Conclusion :**  $f$  est une application linéaire.

- **Bijectivité.** Montrons :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! X \in S_H \mid f(X) = X_0$$

Cela équivaut à établir :

$$\forall X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists ! X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \mid \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Ce résultat est vrai, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Conclusion :**  $f$  est bijective.

**Conclusion :**  $f$  est un isomorphisme. En particulier :  $\dim(S_H) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ .

**Conséquence :**

On obtient :  $\dim(S_H) = n$ .

**Remarque**

Comme dans le cas des EDL, cette structure nous guide sur la méthode de résolution des SDL.

P3. Soit  $X_p$  une solution particulière de  $(E)$ . Soit  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ . On a :

$$\begin{aligned}
 X \in S_E &\iff X' = AX + B \\
 &\iff X' - X'_p = AX + B - AX_p + B \\
 &\iff (X - X_p)' = A(X - X_p) \\
 &\iff X - X_p \in S_H \\
 &\iff \exists X_H \in S_H / X - X_p = X_H \\
 &\iff \exists X_H \in S_H / X = X_p + X_H
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $S_E = \{X_p + X_H / X_H \in S_H\}$ .

#### PRÉPARATION 4

#### PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ainsi que  $B_1, B_2 \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ .

Si  $X_1$  est une solution de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  est une solution de  $X' = AX + B_2$ , alors pour tous  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est une solution de  $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$ .

\* DÉMONSTRATION : Soient  $X_1$  une solution particulière de  $X' = AX + B_1$  et  $X_2$  une solution particulière de  $X' = AX + B_2$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont solutions respectives de  $X' = AX + B_1$  et  $X' = AX + B_2$ , leurs composantes sont des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et donc celles de  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  également. Puis, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' &= \lambda_1 X'_1 + \lambda_2 X'_2 \\
 &= \lambda_1 AX_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_2 B_2 \\
 &= A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$  est solution de  $X' = AX + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)$ .

### IV.3 ÉQUILIBRES ET TRAJECTOIRES

#### DÉFINITION 6

#### ÉQUILIBRE D'UN SDL

Un **équilibre** d'un système différentiel est une solution constante de ce système.

#### À retenir...

La fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de tous les systèmes différentiels homogènes.

Supposons que le système  $X' = AX + B$  possède un équilibre noté  $X_0$ . Dans ce cas :  $\forall t \in I$ ,  $X'_0(t) = 0$ , et on obtient alors :

$$AX_0 = -B$$

Nécessairement :

- $B$  est constante,
- $B \in \text{Im}(A)$ .

Intéressons-nous plus particulièrement aux équilibres des systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

#### PROPRIÉTÉ 5

#### CARACTÉRISATION DES ÉQUILIBRES DES SYSTÈMES HOMOGÈNES

Soit  $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

La fonction  $t \mapsto Y_0$  est un équilibre de  $X' = AX$  si, et seulement si  $Y_0 \in \text{ker}(A)$ .

#### À retenir...

Si  $A$  est inversible, alors la fonction  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

\* DÉMONSTRATION : Notons  $Y : t \mapsto Y_0$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Chaque composante de  $Y$  étant constante, elle est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On a ensuite, puisqu'on sait déjà que  $Y$  est constante :

$$\begin{aligned}
 (Y \text{ est un équilibre de } X' = AX) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = AY(t) \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 = AY(t) \\
 &\iff AY_0 = 0 \\
 &\iff Y_0 \in \text{ker}(A)
 \end{aligned}$$

#### MÉTHODE 5 ♣ Pour déterminer les équilibres du système $X' = AX$ :

- on détermine  $\text{ker}(A)$ ,
- on conclut avec les bons objets : les équilibres sont des applications de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , pas des matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

### EXEMPLE 8

Déterminons les équilibres du système différentiel :  $(E)$  : 
$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$$

### DÉFINITION 7

### TRAJECTOIRE D'UN SDL

Une **trajectoire** de  $X' = AX$  est un ensemble  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$ , où  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est une solution de  $X' = AX$ .

#### Remarque

Une trajectoire associée à un équilibre est réduite à un point de  $\mathbb{R}^n$ .

### PROPRIÉTÉ 6

Si deux trajectoires de  $X' = AX$  ont un point commun, alors elles sont confondues.

Autrement dit, deux trajectoires de  $X' = AX$  sont soit distinctes, soit confondues.

★ DÉMONSTRATION : Soient  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  et  $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)), t \in \mathbb{R}\}$  deux trajectoires associées respectivement aux solutions  $X$  et  $Y$  du système différentiel  $Z' = AZ$ .

Supposons que ces deux trajectoires ont un point commun; autrement dit, supposons qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$ .

Ainsi, en notant  $Z_0$  ce point commun,  $X$  et  $Y$  sont deux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Z' = AZ \\ Z(t_0) = Z_0 \end{cases}$$

Or, par théorème de Cauchy, ce problème ne possède qu'une unique solution. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = Y(t)$$

Et donc leurs trajectoires sont égales.

Conclusion : si deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont égales.

### DÉFINITIONS 8

### TRAJECTOIRE CONVERGENTE, DIVERGENTE

Soit  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  une solution de  $X' = AX$ .

D1 La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$  est **convergente** lorsqu'il existe  $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$ .

On dit alors que la trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) / t \in \mathbb{R}\}$  converge vers  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ .

D2 La trajectoire  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

### EXEMPLE 9

Voyons comment résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ .

- Justifions que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.
- Déterminons les valeurs propres de  $A$  ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

- Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . Montrons que l'application  $Y : t \mapsto e^{\lambda t}V$  est solution de  $X' = AX$ .

- Déduisons-en l'ensemble des solutions de  $X' = AX$ .

- Donnons finalement une trajectoire convergente non constante et une trajectoire divergente de  $X' = AX$ .

# V CAS où A EST DIAGONALISABLE

L'objectif est de résoudre le système différentiel  $X' = AX$  dans le cas où  $A$  est une matrice diagonalisable. Nous allons donner l'ensemble des solutions et voir deux démonstrations du résultat, dont la première utilise le lemme 1 ci-dessous.

## LEMME 1

(HP)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .

La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t}V$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Important !

- Dans le cas où  $A$  est diagonalisable, l'énoncé pourra ne donner aucune étape intermédiaire dans la résolution de  $X' = AX$ . Il faudra alors mettre en œuvre la méthode de l'exemple 5 (et la seconde méthode de démonstration du théorème 2).
- Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, l'énoncé guidera.

\* DÉMONSTRATION : Notons  $Y : t \mapsto e^{\lambda t}V$ . Puisque  $V$  est constant, chaque composante de  $Y$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda e^{\lambda t}V \\ &= e^{\lambda t}\lambda V \\ &= e^{\lambda t}AV \\ &= A \times (e^{\lambda t}V) \\ &= AY(t) \end{aligned} \quad \text{V est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda$$

La fonction  $t \mapsto e^{\lambda t}V$  est donc solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Remarque

On peut s'imaginer la tête de  $Y$  sinon, pour se rendre compte de l'expression de  $Y'(t)$ ...

## THÉORÈME 6

## RÉSOLUTION DE $X' = AX$ , CAS où A EST DIAGONALISABLE (HP)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

On a ainsi :

$$(X \text{ est solution de } X' = AX) \iff (\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i)$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est  $\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$ .

### Important !

Puisque  $A$  est diagonalisable, il existe bien une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .

\* DÉMONSTRATION : Voyons deux démonstrations de ce résultat. Notons  $S$  l'ensemble des solutions du système différentiel  $X' = AX$ .

1. On sait déjà que  $S$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  (conséquences de Propriétés 3 - P2). Notons, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$ .

- D'après le lemme précédent, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $Y_i$  est solution de  $X' = AX$ .
- Montrons que la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille libre de  $S$ .

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Supposons  $a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n = 0$ . Autrement dit, supposons :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 Y_1(t) + \dots + a_n Y_n(t) = 0_{n,1}$$

### Attention !

Il s'agit d'une égalité d'applications (définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ...).

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} V_n = 0_{n,1}$$

En particulier, pour  $t = 0$ , on obtient :

$$a_1 V_1 + \dots + a_n V_n = 0_{n,1}$$

Or, la famille  $(V_1, \dots, V_n)$  est libre (car c'est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ). D'où :

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

Et ainsi, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est libre.

Par conséquent, la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille de  $S$  qui est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal  $n$ , égal à  $\dim(S)$ .

Conclusion : la famille  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de  $S$  et donc :

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(Y_1, \dots, Y_n) \\ &= \{t \mapsto c_1 Y_1(t) + \dots + c_n Y_n(t), (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Ce théorème est hors programme, en revanche, les deux démonstrations fournissent deux méthodes classiques pour résoudre des systèmes différentiels. Mettons en application la seconde méthode sur l'exemple suivant :

**EXEMPLE 10**

Résolvons le système différentiel  $(E)$  :  $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$  d'inconnues  $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

♣ Méthode !

La première méthode serait guidée. En revanche, pour la seconde, une fois la matrice  $A$  diagonalisée, elle est à savoir faire en autonomie.

Et si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, mais seulement semblable à une matrice triangulaire ?  
Dans ce cas, au moins une des équations différentielles sur les  $z_i$  aura un second membre non constant...  
Ce n'est pas nécessairement problématique !

Pour terminer, voici une conséquence du théorème précédent qui fournit un résultat sur le comportement des trajectoires quand  $t \rightarrow +\infty$  :

### THÉORÈME 7

### COMPORTEMENT DES TRAJECTOIRES, CAS OÙ $A$ EST DIAGONALISABLE

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable.

- T1** Si  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive, alors  $X' = AX$  possède des trajectoires divergentes.
- T2** Si les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).
- T3** Si les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers  $(0, \dots, 0)$ , seul équilibre du système différentiel.

#### Confusion d'objets !

Une trajectoire est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et un équilibre est un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (ou plus précisément une application constante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ), assimilée à un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ... On comprend bien l'idée tout de même !

\* DÉMONSTRATION : Notons :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  (licite, car  $A$  est diagonalisable) telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,
- pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_k$  la  $k$ -ième composante de  $X$  (où  $X$  est une solution de  $X' = AX$ ) et, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $v_{i,k}$  la  $k$ -ième composante de  $V_i$ .

T1. Supposons que  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons que  $\lambda_1 > 0$ .

D'après le lemme 1, la fonction  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est solution de  $X' = AX$  sur  $\mathbb{R}$ .

Or :

- $\lambda_1 > 0$ , donc par produit et composition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = +\infty$$

- $V_1$  est vecteur propre de  $A$ , donc  $V_1$  est non nul. Il existe donc  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , que nous considérons ensuite, tel que la  $k$ -ième composante de  $V_1$  soit non nulle.

Par produit, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} v_{1,k} = \pm\infty$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1$  est divergente.

T2. Supposons que les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles. Quitte à échanger les valeurs propres, supposons :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lambda_i < 0$$

Soit  $X$  une solution de  $X' = AX$ . D'après le théorème 6, il existe des réels  $c_1, \dots, c_n$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} V_i$$

Or :

- Pour tout  $i \in \llbracket p+1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_i < 0$ . D'où, par produit et composition :

$$\forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_i t} = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = 0$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ . D'où :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, c_i e^{\lambda_i t} V_i = c_i V_i$$

Et ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} c_i e^{\lambda_i t} v_{i,k} = c_i v_{i,k}$$

#### Remarque

Les cas où 0 est seule VP et où 0 n'est pas VP sont inclus (en considérant  $p = n$  et  $p = 0$  respectivement).

Dans le cas où  $p = 0$ , chaque somme  $\sum_{i=1}^p (\dots)$  sera nulle, par convention.

On obtient finalement par somme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = \sum_{i=1}^p c_i v_{i,k}$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $\sum_{i=1}^p c_i V_i$ .

Notons  $V = \sum_{i=1}^p c_i V_i$  et montrons que  $V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

On sait que, pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 0.

Donc :  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $V_i \in \ker(A)$ . Mais  $\ker(A)$  est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi :

$$V \in \ker(A)$$

D'après la propriété 5, on en déduit que la fonction  $t \mapsto V$  est un équilibre de  $X' = AX$ .

**Conclusion** : toutes les trajectoires de  $X' = AX$  convergent vers un équilibre.

**T3.** Cas particulier de la démonstration précédente, dans le cas où  $p = 0$ ...

On obtient :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$$

Par conséquent : la trajectoire associée à  $X$  converge vers  $(0, \dots, 0)$ .

Bien évidemment,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est un équilibre de  $X' = AX$ . Et c'est le seul ! En effet, les valeurs propres de  $A$  sont strictement négatives, donc 0 n'est pas valeur propre de  $A$ . Ainsi,  $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$ . Et donc, d'après la propriété 5,  $t \mapsto 0_{n,1}$  est le seul équilibre de  $X' = AX$ .

\_\_\_\_\_ |