Technique

Exercice 1 - ●○○ - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = \mathrm{e}^x + x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' - y = -2\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$
8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
10. $y' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
11. $y' - 4y = \mathrm{e}^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{4x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[x]$.
12. $y' + y = 2x\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 2 - ●○○ - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[x]$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)\mathrm{e}^{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)e^{x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3 - ●●○ - Un premier système différentiel

Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + y \\ y' & = & y \end{array}\right.$$

Exercice 4 - ●●○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcccc} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2x & - & 2y \end{array}\right.$$

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Montrer que les trajectoires de (S) sont convergentes.
3. Trouver les équilibres de (S).
4. Résoudre le système (S).
5. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers $(-2; -2)$.

Entraînement

Exercice 5 – ●●○ - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-x}$. Établir :

$$\big(f \text{ est solution de } (E)\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 6 – ●●○ - Méthode de variation de la constante

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)e^x$, où $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7 – ●○○ - De taille 2

On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y \end{array} \right.$$

On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A possède une unique valeur propre que l'on déterminera. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis calculer P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T cette matrice.
4. Soient $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$.
   - 4.a. Établir :
   $$X' = AX \iff Y' = TY$$
   - 4.b. Résoudre le système $Y' = TY$.
   - 4.c. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 8 – ●●○ - De taille 3

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & -2x & + & y & + & z \\ y' & = & x & - & 2y & + & z \\ z' & = & x & + & y & - & 2z \end{array} \right.$$

Exercice 9 – ●●○ - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \quad (\star)$$

1. Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\star)$.
   - 1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$? *Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.*
   - 1.b. Déterminer $f(0)$.
   - 1.c. Établir :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$
   - 1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - 1.e. Déterminer alors la fonction f.
2. Conclure sur l'ensemble des solutions de $(\star)$.

Exercice 10 – ●●○ - Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \ ; \ f(0) = -4 \quad (\star)$$

1. Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. Posons $g : x \longmapsto f(x)f(-x)$.
   - 1.a. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
   - 1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f.

1.c. Déterminer alors la fonction f.

2. Conclure sur l'ensemble des solutions de $(\star)$.

Concours

Exercice 11 - ●●○ - EDL3 homogène à coefficients constants

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \;\; ; \;\; y''(0) = 0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x, $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.

   3.a. Déterminer $Z(0)$.

   3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

   3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.
4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

Exercice 12 - ●●○ - EDHEC 2023 Appli

Partie 1. Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

   3.a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big)$.

   3.b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Partie 2. Réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

Dans la suite, on suppose que pour tout $t > 1$:

- $\mathbb{P}\big([Y > t]\big) > 0$
- la loi de $\dfrac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. 5.a. Établir :
   $$\forall x \geqslant 1, \;\; \forall t > 1, \;\; G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

   5.b. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et en déduire :
   $$\forall x > 1, \;\; \forall t > 1, \;\; G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

   5.c. Montrer enfin :
   $$\forall t > 1, \;\; G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$. On note (E_1) l'équation différentielle $y+\dfrac{t}{c}y'=0$ et (E_2) l'équation différentielle $y+\dfrac{t}{c}y'=1$.
Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   - 6.a. Soit z la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $\forall t\in]1;+\infty[,\ z(t)=t^c y(t)$. Montrer que y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.
   - 6.b. Donner alors toutes les solutions de (E_1).
   - 6.c. Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de (E_2).
   - 6.d. Montrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, $y-u$ est solution de (E_1).
   - 6.e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions y définies par :

$$\forall t>1,\ y(t)=1+\frac{K}{t^c}$$

7.
   - 7.a. Montrer finalement que l'on a : $\forall t>1,\ G(t)=1-\dfrac{1}{t^c}$.
   - 7.b. Vérifier que la relation s'étend à $[1;+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z=\ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   - 8.a. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   - 8.b. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   - 8.c. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simuleX(c)` et permettant de simuler X.