Exercices du chapitre 15
Estimations ponctuelle et par intervalle de confiance

Exercice 1 - ●●○○ - Maximum de vraisemblance

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre λ d'une loi de Poisson.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre λ d'une loi exponentielle.
3. On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a;0]$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour a.

Exercice 2 - ●●○○ - Intervalles de confiance pour l'espérance d'une $\mathcal{N}(m,1)$

On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(m,1)$, où m est inconnu. On dispose d'un n-échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de X.

1. Donner la loi de $\overline{X_n}$ et celle de $\overline{X_n}^* = \sqrt{n}(\overline{X_n}-m)$.
2. Soit $\alpha \in]0;1[$. Justifier l'existence d'un unique réel t_α tel que $\Phi(t_\alpha) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
3. En déduire que $\left[\overline{X_n} - t_\alpha\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + t_\alpha\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$.
4. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que $\left[\overline{X_n} - \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}, \overline{X_n} + \dfrac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$.
5. **Comparaison des deux intervalles.** On considère $n = 100$ et $\alpha = 0,05$. A l'aide d'une table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, déterminer une valeur approchée de t_α.
   Comparer alors l'amplitude des deux intervalles de confiance obtenus dans les questions précédentes.
6. Écrire une fonction `Python` prenant en arguments un réel m et un entier naturel non nul n, qui simule 1000 réalisations d'un échantillon de taille n d'une loi $\mathcal{N}(m,1)$, et qui compte le nombre de réalisations fournissant un intervalle de confiance contenant la valeur m choisie.

Exercice 3 - ●●○○ - Prise de décision

Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p $(0<p<1)$ d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela, il teste la machine et prélève un échantillon de n objets qu'il analyse, avec $n \geqslant 1$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ème objet prélevé est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. 1.a. Montrer que $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur de p d'espérance p.
   1.b. Démontrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|F_n - p| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.
2. Soit α un réel de $]0,1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1-\alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$.
   2.a. Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   2.b. Justifier l'existence d'un unique réel t_α tel que $\Phi(t_\alpha) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Montrer qu'un intervalle de confiance de p au niveau $1-\alpha$ est donné par $\left[F_n - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, F_n + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right]$.
   2.c. On suppose dans cette question qu'en fonctionnement normal la machine produit une proportion $p = 0,05$ d'objets défectueux. Le directeur analyse 10000 objets et compte 600 objets défectueux sur cet échantillon. Décide-t-il d'acheter la machine, avec un risque égal à $0,05$? On donne $\Phi(2) \simeq 0,975$.

Exercice 4 - ●●○○

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}\big([0,\theta]\big)$, où θ est inconnu. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.
2. 2.a. Démontrer que pour $\theta > 0$ fixé, il existe deux réels x_1 et x_2, que l'on exprimera en fonction de θ, tels que

$$F_{M_n}(x_1) = 0,025 \quad ; \quad F_{M_n}(x_2) = 0,975$$

   2.b. En déduire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $0,95$.

3. 3.a. Démontrer que

$$n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$$

où X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

3.b. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de risque α de la forme $[M_n, U_n]$, où U_n est un estimateur de θ.

Exercice 5 - ●●○○ - EDHEC 2016 S

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 (avec $\sigma > 0$). On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1 = m$ et $\theta_2 = \sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.
Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de X, avec $n \geqslant 2$.
On appelle vraisemblance du couple (θ_1, θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i), \text{ où } x_1, \dots, x_n \text{ sont des nombres réels donnés}$$

1. Donner l'expression de $L(\theta_1, \theta_2)$, puis celle de $\ln\big(L(\theta_1, \theta_2)\big)$ en fonction de θ_1, θ_2 et $x_1, \dots, x_n$.
2. 2.a. Justifier que la fonction $f : (\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln\big(L(\theta_1, \theta_2)\big)$, définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

   2.b. Montrer que f admet un seul point critique $A = \left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)$ sur U tel que :

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \widehat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta}_1^{\,2}$$

   2.c. Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   On vérifiera en particulier que : $\partial^2_{2,2}(f)\left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right) = \dfrac{-n}{2\widehat{\theta}_2^{\,2}}$.

   2.d. En déduire que f admet un maximum local en $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$.

   2.e. Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$.