

EXERCICES DU CHAPITRE 15

CONVERGENCE DE SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●● - Fonction de répartition empirique

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi, de fonction de répartition notée F . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_{n,x}$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_{n,x}(\omega) = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket / X_i(\omega) \leq x\})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_{n,x} = \frac{1}{n} Z_{n,x}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{1}_{[X_i \leq x]}$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_{[X_i \leq x]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [X_i \leq x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner la loi de $\mathbb{1}_{[X_i \leq x]}$.

2. Déterminer la loi de $Z_{n,x}$ puis donner son espérance et sa variance.
 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|T_{n,x} - F(x)| \geq \varepsilon) = 0$.

EXERCICE 2 - ●●●

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance et une variance. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_n) = 0$ et qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \ell$.

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}((X_n - \ell)^2) = \mathbb{V}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n - \ell))^2$.
 2. En déduire : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - \ell| \geq \varepsilon) = 0$.

EXERCICE 3 - ●●●

On définit, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet pour densité f_n . Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 4 - ●●● - Classique

Considérons une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

1. On considère la variable aléatoire $X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$. Donner l'espérance et la variance de X^* .
 2. Par quelle loi peut-on approcher la variable aléatoire X^* si n est assez grand ?
 Montrer qu'alors, pour n suffisamment grand, une valeur approchée de $\mathbb{P}(|X| \geq N)$ est $\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

EXERCICE 5 - ●●● - Classique

Considérons une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{P}(5)$. On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

1. Quelle est la loi de Y_k ?
 2. Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $\Phi(\alpha) = 0,99$. Établir : $\alpha > 0$.
 3. Justifier que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_k - 5k > \alpha\sqrt{5k}) = 0,01$.

EXERCICE 6 - ●●●

Considérons une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0; 1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - 1.a. Déterminer la loi de Y_n .
 - 1.b. Calculer $\text{Cov}(Y_n; Y_{n+1})$.
2. Justifier que si $|n - p| \geq 2$, alors $\text{Cov}(Y_n, Y_p) = 0$.
3. Démontrer : $\mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.
 - 4.a. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
 - 4.b. En déduire : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon) = 0$.

CONCOURS

EXERCICE 7 - ●●● - EDHEC 2013 E

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1.a. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x) dx$.
 - 1.b. Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2.
 - 2.a. Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.
 - 2.b. Établir l'existence de la variance de X , puis donner sa valeur.

3. Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4.
 - 4.a. Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
 - 4.b. Pour tout réel x positif ou nul, déterminer $F_Y(x)$.
 - 4.c. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de Y est la fonction g définie par : $g : x \mapsto \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
 - 4.d. Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.
5. On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M = \min(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a $M(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$. On admet que M est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de M .
 - 5.a. Expliciter $F_M(x)$ pour tout réel x .
 - 5.b. En déduire que M suit la même loi que Y .
 - 5.c. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction **Python** permettant d'obtenir une réalisation de la variable aléatoire Y .
6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de M_n et montrer que la suite $(M_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

EXERCICE 8 - ●●● - EML 2014 E

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 4, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

PARTIE I : ÉTUDE DU CAS $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. **1.a.** Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 . En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.
- 1.b.** Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

PARTIE II : CAS GÉNÉRAL

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Déterminer $X_n(\Omega)$.
4. Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
5. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.
6. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \frac{n-i+1}{n}$.
7. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.
8. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$.
En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
9. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.
10. Démontrer : $\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

PARTIE III : UNE CONVERGENCE EN LOI

Dans cette partie, on s'intéresse à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, on pose $u_k = \frac{k-1}{k!}$.
Démontrer que la suite $(u_k)_{k \geq 2}$ définit une loi de probabilité. On considère alors une variable aléatoire Z dont la loi est donnée par la suite u .
12. Démontrer que la suite $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers Z .
13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.