16

Probabilités

Chaînes de Markov

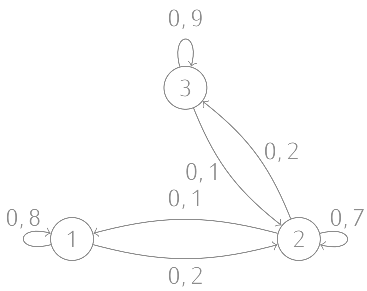
Pour bien démarrer...

1. Petit inventaire de méthodes pour calculer des puissances de matrices :
   - en diagonalisant : $A = PDP^{-1}$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (calcul immédiat de D^n car D est diagonale) ;
   - avec une bonne décomposition de A en somme de deux matrices qui commutent dont les puissances sont faciles à calculer (matrice nilpotente, matrice avec que des 1,...) puis à l'aide du binôme de Newton ;
   - en conjecturant une relation à démontrer par récurrence ;
   - en trigonalisant : $A = PTP^{-1}$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$ (calcul de T^n possible par conjecture + récurrenc ou binôme de Newton par exemple) ;
   - à l'aide de la division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur de A...

2. On classifie les étudiants de CPGE ECG en trois groupes :
   - Groupe 1 : étudiants qui ne travaillent pas ;
   - Groupe 2 : étudiants qui travaillent mais avec des résultats encore faibles ;
   - Groupe 3 : étudiants qui travaillent et avec des résultats très encourageants.

   On choisit un étudiant au hasard en CPGE ECG et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au groupe dans lequel se situe l'étudiant après n semaines passées en CPGE. On considère $X_0 = 1$.
   On considère que, d'une semaine à l'autre :
   - 20% des étudiants du groupe 1 passent dans le groupe 2, les autres restent dans le groupe 1 ;
   - 20% des étudiants du groupe 2 passent dans le groupe 3, 10% retournent dans le groupe 1 et les autres restent dans le groupe 2 ;
   - 10% des étudiants du groupe 3 retournent dans le groupe 2 et les autres restent dans le groupe 3.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$.
   - Représenter la situation par un graphe pondéré et orienté.



   - On admet que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, les probabilités $\mathbb{P}([X_n = 1])$, $\mathbb{P}([X_n = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 3])$. sont non nulles. Exprimer, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, la probabilité $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$ en fonction de $\mathbb{P}([X_n = 1])$, $\mathbb{P}([X_n = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 3])$.
     Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales avec $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}([X_n = i] \cap [X_{n+1} = 1]) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}([X_n = i])\mathbb{P}_{[X_n = i]}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\ &= 0,8\mathbb{P}([X_n = 1]) + 0,1\mathbb{P}([X_n = 2])\end{aligned}$$

$\forall i \in [\![1; 3]\!],\ \mathbb{P}([X_n = i]) \neq 0$ car $n \geqslant 2$

   - En déduire une matrice M telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n M$. Qu'en déduire ?
     - ⋆ De la même façon que précédemment, on obtient les relations :

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = 0,2\mathbb{P}([X_n = 1]) + 0,7\mathbb{P}([X_n = 2]) + 0,1\mathbb{P}([X_n = 3])$$

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = 0,2\mathbb{P}([X_n = 2]) + 0,9\mathbb{P}([X_n = 3])$$

     - ⋆ Mais, les trois relations obtenues sont encore valables pour $n = 0$ et $n = 1$ (à vérifier...).
     - ⋆ On pose alors $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$$

     - ⋆ Par récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 M^n$$

       Et, puisque $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la loi de X_n se lit sur la première ligne de la matrice M^n...
   - Que peut-on dire de la matrice M ?
     Elle est stochastique !

I Graphe probabiliste

Définition 1 — **Graphe orienté et pondéré**

Un **graphe orienté et pondéré** $\mathscr{G}$ est la donnée d'un triplet $(S, \mathcal{A}, p)$, où :

- S est un ensemble fini, appelé ensemble des **sommets** de $\mathscr{G}$,
- $\mathcal{A}$ est un ensemble de *couples* de sommets, appelé ensemble des **arcs** de $\mathscr{G}$,
- p est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, qui à chaque arc associe un réel appelé **poids**.

Exemples 1

E1 Le graphe de l'exemple introductif est un graphe orienté et pondéré.

E2 Une carte routière peut se modéliser par un graphe orienté et pondéré dont les sommets sont les villes et les arêtes ou arcs sont les axes routiers indiquant les distances à parcourir sur chaque axe.

Définition 2 — **Graphe probabiliste**

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré $(S, \mathcal{A}, p)$ tel que :

- $\forall (i,j) \in \mathcal{A},\ p(i,j) \geqslant 0$ (les poids sont positifs),
- $\forall i \in S, \displaystyle\sum_{j \in S, (i,j) \in \mathcal{A}} p(i,j) = 1$ (la somme des poids issus d'un même sommet est égale à 1).

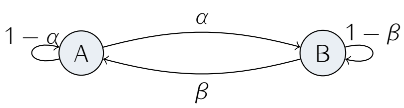
☞ **Rappel...**

La **matrice d'adjacence** d'un graphe $\mathscr{G}$ d'ordre n est la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$:
- $m_{i,j}$ est le nombre d'arêtes reliant s_i et s_j si $\mathscr{G}$ est non orienté ;
- $m_{i,j}$ est le nombre d'arcs de s_i vers s_j si $\mathscr{G}$ est orienté.

Dans le cas des graphes pondérés et probabilistes, on ne parle pas de matrice d'adjacence... Mais il y a bien une matrice associée à de tels graphes. Nous en parlons dans la prochaine partie.

Exemples 2

E1 Le graphe de l'exemple introductif est un graphe probabiliste.

E2 Pour tous $\alpha, \beta \in [0; 1]$, le graphe  est un graphe probabiliste.

II Chaîne de Markov

Définition 3 — **Chaîne de Markov**

Soient E un ensemble fini et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov sur E** lorsque :

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) \subset E$,

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(e_0, \dots, e_{n+1}) \in E^{n+2}$ tel que $\mathbb{P}\big([X_0 = e_0] \cap \dots \cap [X_n = e_n]\big) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_0 = e_0] \cap \dots \cap [X_n = e_n]}\big([X_{n+1} = e_{n+1}]\big) = \mathbb{P}_{[X_n = e_n]}\big([X_{n+1} = e_{n+1}]\big)$$

Pourquoi ?

Pourquoi, sous l'hypothèse, a-t-on également $\mathbb{P}([X_n = e_n]) \neq 0$?

En gros...

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_{n+1} ne dépend que de la loi de X_n, et pas de la loi des $X_0, \dots, X_{n-1}$.
Et dans ce cas, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'état à l'instant n ne dépend que de l'état à l'instant n (et pas aux instants précédents).

Bien souvent, n désigne un instant et X_n une position ou un état à l'instant n.

Définition 4 — **Chaîne de Markov homogène**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un ensemble fini E.
La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **homogène** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(a, b) \in E^2$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X_n = a]}\big([X_{n+1} = b]\big)$ ne dépend pas de n (et donc : $\mathbb{P}_{[X_n = a]}\big([X_{n+1} = b]\big) = \mathbb{P}_{[X_0 = a]}\big([X_1 = b]\big)$).

Exemple 3

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple introductif est une chaîne de Markov homogène sur $\{1; 2; 3\}$.

☞ **Pour info...**

Lorsque l'on considère une *suite* de VA indexée sur un ensemble non dénombrable, par exemple $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, $(X_t)_{t \in [0;1]}$ ou $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, on parle de **processus aléatoire**.
Et on peut, de la même façon, définir un processus aléatoire de Markov fini et homogène (voir `ESSEC 2023 Appli 2`).

Dans toute la suite du cours, on notera r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on ne considérera que des chaînes de Markov finies homogènes sur l'ensemble $[\![1; r]\!]$.

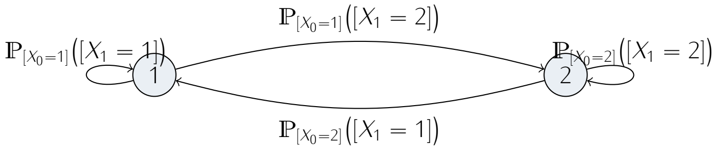
Définition 5 — Graphe probabiliste d'une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$.
Le **graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le graphe $\mathscr{G}=(S,\mathcal{A},p)$ où :

- $S=[\![1;r]\!]$,
- $\mathcal{A}=[\![1;r]\!]\times[\![1;r]\!]$,
- pour tout $(i,j)\in\mathcal{A}$, $p(i,j)=\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1=j]\big)$.

Important !
Il s'agit bien d'un graphe probabiliste car :
- les poids sont positifs (des probabilités),
- puisque pour tout i, l'application $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$ est une probabilité et que $\big([X_1=j]\big)_{j\in[\![1;r]\!]}$ est un SCE, on a bien $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1=j]\big)=1$.

Cas particulier $r=2$:



Petite remarque
Et on imagine assez bien ce que cela donne dans le cas $r=3$ par exemple.

II.1 Matrice de transition

Définition 6 — Matrice stochastique (par ligne)

Soit $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **stochastique (par ligne)** lorsque :

✓ $\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j}\geqslant 0$ (tous les coefficients de M sont positifs),

✓ $\forall i\in[\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=1$ (la somme des coefficients de chaque ligne de M est égale à 1).

Propriété 1 — (HP - à redémontrer)

La matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si, et seulement si, tous ses coefficients sont positifs et que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

⋆ Démonstration :

Notons $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il suffit d'établir l'équivalence :

$$\forall i\in[\![1;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=1 \iff \big(\text{le vecteur } V \text{ est vecteur propre de } M \text{ pour la valeur propre } 1\big)$$

Puisque $V\neq 0_{n,1}$, on a :

$$\begin{aligned}\big(V \text{ est vecteur propre de } M \text{ pour la valeur propre } 1\big) &\iff MV=V\\ &\iff \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{n,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\\ &\iff \forall i\in[\![1;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}=1\end{aligned}$$

⋆

Exemple 4

Écrivons une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une matrice M et renvoyant **True** si la matrice est stochastique, et **False** sinon.

```
import numpy as np

def stoch(M):
    n,n=np.shape(M)
    for i in range(0,n):
```

☞ Rappel...
Si M est un tableau **Python**, la commande `np.shape(M)` renvoie le couple (n,p), ou n est le nombre de lignes et p le nombre de colonnes de M.

```
        for j in range(0,n):
            if M[i,j]<0:
                return False
        if sum(M[i,:])!=1:
            return False
    return True
```

Définition 7 — **Matrice de transition**

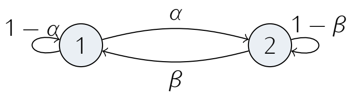
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$.
La **matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$** est la matrice $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j)\in[\![1;r]\!]^2,\ m_{i,j}=\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1=j]\big)$$

Autrement dit, le coefficient (i,j) de M est la **probabilité de transition** de i vers j.

En gros...
La matrice de transition est une matrice d'adjacence du graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov dans laquelle chaque coefficient n'est pas le nombre d'arcs allant de i vers j, mais le poids de l'arc.

Exemples 5

E1 La matrice de transition de la chaîne de Markov dont le graphe probabiliste est 

est la matrice $\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$.

E2 Cas particulier $r=3$:
La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[\![1;3]\!]$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}_{[X_0=1]}\big([X_1=1]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=1]}\big([X_1=2]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=1]}\big([X_1=3]\big)\\ \mathbb{P}_{[X_0=2]}\big([X_1=1]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=2]}\big([X_1=2]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=2]}\big([X_1=3]\big)\\ \mathbb{P}_{[X_0=3]}\big([X_1=1]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=3]}\big([X_1=2]\big) & \mathbb{P}_{[X_0=3]}\big([X_1=3]\big)\end{pmatrix}$$

Propriété 2

La matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique.

☞ Pour info...
Réciproquement, une matrice stochastique peut toujours être associée à un graphe probabiliste et donc à une chaîne de Markov.

★ Démonstration :
Notons $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[\![1;r]\!]$. On a :

- ✓ pour tout $(i,j)\in[\![1;r]\!]^2$:

$$m_{i,j}=\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1=j]\big)\geqslant 0$$

- ✓ pour tout $i\in[\![1;r]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} m_{i,j} &= \sum_{j=1}^{r}\mathbb{P}_{[X_0=i]}\big([X_1=j]\big)\\ &=1\end{aligned}$$

$\mathbb{P}_{[X_0=i]}$ est une probabilité et $\big([X_1=j]\big)_{j\in[\![1;r]\!]}$ est un SCE

☞ Rappel...
Si $\mathbb{P}(A)\neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
Et donc, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un SCE, alors : $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}_A(B_k)=1$.

La matrice M est donc stochastique. ★

II.2 Loi d'une chaîne de Markov

Définition 8 — **État d'une chaîne de Markov**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le **n-ième état probabiliste de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$** est la matrice ligne, notée U_n, définie par :

$$U_n=\Big(\mathbb{P}\big([X_n=1]\quad\dots\quad\mathbb{P}\big([X_n=r]\big)\Big)$$

Autrement dit :
C'est la matrice ligne composée de la loi de la variable aléatoire X_n.

Propriété 3

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le n-ème état de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une matrice ligne stochastique.

DÉMONSTRATION : Immédiat car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $X_n(\Omega) \subset [\![1;r]\!]$, on a :

$$\forall j \in [\![1;r]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \geqslant 0 \ \ ; \ \ \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = 1$$

PROPRIÉTÉ 4 — ÉVOLUTION EN TEMPS

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$.
On note M la matrice de transition associée et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n le n-ième état probabiliste de la chaîne.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n \times M$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 \times M^n$$

✘ Attention !
Habituellement, on travaillait sur des matrices colonnes... Ici, on travaille sur des matrices lignes. Dans tous les cas, on vérifie bien la concordance des lignes/colonnes afin que le produit matriciel soit licite.

DÉMONSTRATION :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, d'après la formule des probabilités totales avec $\big([X_n = j]\big)_{j\in[\![1;r]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) &= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j] \cap [X_{n+1} = k]\big) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big)\mathbb{P}_{[X_n=j]}\big([X_{n+1} = k]\big) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big)\, m_{j,k} \\
&= \big(\mathbb{P}\big([X_n = 1]\big) \ \ \dots \ \ \mathbb{P}\big([X_n = r]\big)\big) \times \begin{pmatrix} m_{1,k} \\ \vdots \\ m_{r,k} \end{pmatrix} \\
&= U_n \times \begin{pmatrix} m_{1,k} \\ \vdots \\ m_{r,k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

par définition d'une chaîne de Markov : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \neq 0$

D'où :

$$\big(\mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1]\big) \ \ \dots \ \ \mathbb{P}\big([X_{n+1} = r]\big)\big) = U_n \times \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \dots \\ m_{r,1} & \dots & m_{r,r} \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$U_{n+1} = U_n \times M$$

- Le second point découle du premier, par récurrence immédiate !

Autrement dit :
La k-ième colonne de U_{n+1} est égale à $U_n \times C_k$, où C_k est la k-ième colonne de M...

Important !
L'énoncé demande parfois de redémontrer ces deux résultats dans un cas particulier.

II.3 COMPORTEMENT LIMITE

DÉFINITION 9 — ÉTAT STABLE

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$ dont la matrice de transition est notée M.
Un **état stable** (ou **état invariant** ou **état stationnaire**) de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une matrice ligne U telle que :

- ✓ U est stochastique,
- ✓ $U \times M = U$

Vocabulaire
On parle parfois de loi de probabilité invariante par M.

EXEMPLE 6

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un chaîne de Markov de matrice de transition M et dont le n-ième état stable est noté U_n. Que dire si U_0 est un état stable ?
Dans ce cas, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet, par récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_0$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n a la même loi que X_0.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer les états stables :** on résout, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \end{pmatrix}$ avec $x_1, \dots, x_r \geqslant 0$, le système

$$\left\{ \begin{array}{l} XM = X \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i = 1 \end{array} \right. \quad \text{qui est équivalent à} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^t M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i = 1 \end{array} \right. .$$

Autrement dit : Les états stables sont les stochastiques U telles que ${}^t U$ est vecteur propre de ${}^t M$ pour la valeur propre 1.

Important ! Puisque M est stochastique, 1 est valeur propre de M et donc 1 est également valeur propre de ${}^t M$.

Théorème 1 — **Convergence en loi d'une chaîne de Markov (HP ?)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $[\![1;r]\!]$ dont la matrice de transition est notée M.
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, alors la matrice ligne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}([X=1]) & \dots & \mathbb{P}([X=r]) \end{pmatrix}$ est un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autrement dit : Si une chaîne de Markov est convergente (en loi) alors elle converge vers un état stable.

☞ Pour info... Il existe des conditions suffisantes, portant sur M, garantissant l'existence, voire l'unicité d'un état stable ; et même la convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers cet état stable ! Nous en verrons en exercice...

⋆ Démonstration :
Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Notons $U = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X=1]) & \dots & \mathbb{P}([X=r]) \end{pmatrix}$.

- Montrons que U est stochastique.
  - ✓ les coefficients de U sont positifs, car ce sont des probabilités ;
  - ✓ puis :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{r} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n=j]) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X_n=j]) \\ &= \lim_{n\to+\infty} 1 \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ X_n(\Omega)\subset[\![1;r]\!] \\ &= 1 \end{aligned}$$

☞ Rappel... S'il n'y a pas de FI, la limite d'une somme est la somme des limites.

La matrice U est donc stochastique.

- Montrons que $UM = U$.
  On rappelle que l'on avait obtenu dans la démonstration de la propriété 4 :

$$\forall k\in[\![1;r]\!],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1}=k]) = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X_n=j])\, m_{j,k}$$

D'où, pour tout $k\in[\![1;r]\!]$, en faisant tendre $n\to+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X=j])\, m_{j,k} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X=1] & \dots & \mathbb{P}([X=r]) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{1,k} \\ \vdots \\ m_{r,k} \end{pmatrix} \\ &= U \times \begin{pmatrix} m_{1,k} \\ \vdots \\ m_{r,k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$U = U \times M$$

Conclusion : U est un état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ⋆

Exemple 7

Reprenons la chaîne de Markov de l'introduction dont la matrice de transition est la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

- Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un unique état stable et déterminons-le.
  Soient $x, y, z \in \mathbb{R}+$ et $U = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.On a :

$$\begin{aligned} \big(U \text{ est un état stable de } (X_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &\iff \left\{ \begin{array}{l} U = UM \\ x+y+z=1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} {}^t M {}^t U = {}^t U \\ x+y+z=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Important ! U doit être stochastique, donc à coefficients positifs ! Autant inclure cette "contrainte" dès le début.

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 0{,}8x+0{,}1y &= x \\ 0{,}2x+0{,}7y+0{,}1z &= y \\ 0{,}2y+0{,}9z &= z \\ x+\quad y+\quad z &= 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} -0{,}2x+0{,}1y &= 0 \\ 0{,}2x-0{,}3y+0{,}1z &= 0 \\ 0{,}2y-0{,}1z &= 0 \\ x+\quad y+\quad z &= 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_4\leftarrow 0,2L_4+L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} -0{,}2x+0{,}1y &= 0 \\ -0{,}2y+0{,}1z &= 0 \\ 0{,}2y-0{,}1z &= 0 \\ 0{,}3y+0{,}2z &= 0{,}2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} -0{,}2x+0{,}1y &= 0 \\ -0{,}2y+0{,}1z &= 0 \\ 0{,}3y+0{,}2z &= 0{,}2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow 2L_3+3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} -0{,}2x+0{,}1y &= 0 \\ -0{,}2y+0{,}1z &= 0 \\ 0{,}7z &= 0{,}4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{7} \\ y=\frac{2}{7} \\ z=\frac{4}{7} \end{array}\right.$$

$$\iff \quad U=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

Conclusion : l'unique état stable de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$.

♡ Astuce du chef ! ♡
On ne cherche pas à mettre la ligne $x+y+z=1$ en première ligne, même si c'est tentant pour simplifier les calculs... Plusieurs raisons à cela :
- les calculs ne sont pas plus simples/rapides en la mettant en première ligne : cet exemple permet de nous en convaincre... ;
- cette ligne servira de vérification de la solution du système (simple à vérifier) ;
- en la laissant en dernière ligne, les trois premières traduisent seulement l'égalité ${}^tM{}^tU={}^tU$, qui admet, puisque 1 est valeur propre de M, probablement une infinité de solutions (à condition qu'on puisse bien trouver $x,y,z\geqslant 0$...) ;
- si l'énoncé demande au préalable de trouver l'espace propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1, le lien est alors direct : il suffira de donner un vecteur stochastique correspondant...

Vérification
Au moment de conclure, on vérifie au moins que U est bien stochastique...

- Écrivons une fonction **Python** permettant de calculer et représenter les états 0 à N de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def graphique(N):
    A=np.array([[0.8,0.2,0],[0.1,0.7,0.2],[0,0.1,0.9]])
    U=np.array([[1,0,0]])
    L1,L2,L3=[1],[0],[0]
    for k in range(1,N+1):
        U=np.dot(U,A)
        L1.append(U[0,0])
        L2.append(U[0,1])
        L3.append(U[0,2])
    plt.plot(range(N+1),L1,"r+",label='$P([X_n=1])$')
    plt.plot(range(N+1),L2,"b*",label='$P([X_n=2])$')
    plt.plot(range(N+1),L3,"go",label='$P([X_n=3])$')
    plt.legend()
    plt.show()
```